Dodatek E. Liczby kardynalne

Do określania liczby elementów zbiorów skończonych służą liczby naturalne. W wykładzie 7 przyjęliśmy, że skończony zbiór A ma n elementów (gdzie $n \in \mathbb{N}$), jeśli jest równoliczny ze zbiorem $[n]$, złożonym z liczb $1, \ldots, n$, jeśli $n > 0$ i równym $\emptyset$, gdy $n = 0$. Zbiór $[n]$ uznaliśmy więc za „wzorcowy" zbiór n-elementowy. Innym takim zbiorem, którym teraz wygodniej nam będzie się posługiwać, jest odcinek początkowy $O(n) = \{k \in \mathbb{N} : k < n\}$ wyznaczony w zbiorze liczb naturalnych przez liczbę n. Oznaczając symbolem $|A|$ liczbę elementów zbioru A, czyli tę jedyną liczbę n, dla której $A \sim O(n)$, możemy stwierdzić, że dla dowolnych zbiorów skończonych A i B

$$A \sim B \;\Leftrightarrow\; |A| = |B|.$$

Równoliczność zbiorów skończonych jest więc scharakteryzowana przez równość przyporządkowanych tym zbiorom liczb ich elementów. Zarazem przypisanie zbiorowi A liczby $|A|$ następuje w wyniku porównania zbioru A pod względem mocy ze „wzorcowymi" zbiorami skończonymi postaci $O(n)$.

W tym rozdziale rozszerzymy pojęcie liczby elementów na zbiory nieskończone.

Przypomnijmy, że w toku dotychczasowych wykładów ustaliliśmy jedynie, co znaczą stwierdzenia w rodzaju: „zbiory A i B mają tę samą moc" lub „moc jednego zbioru jest mniejsza niż moc drugiego zbioru". Wygodnie jest jednak zdefiniować tzw. liczby kardynalne i posługiwać się nimi w taki sposób, w jaki używamy liczb naturalnych przy badaniu liczebności zbiorów skończonych. Chodzi więc o to, by dla każdego zbioru A istniała dokładnie jedna liczba kardynalna, którą nazwiemy jego mocą i oznaczymy symbolem $|A|$. Równoliczność zbiorów A, B powinna być przy tym scharakteryzowana przez równość przyporządkowanych tym zbiorom liczb kardynalnych:

$$A \sim B \;\Leftrightarrow\; |A| = |B|,$$

gdzie znak równości po prawej stronie powyższej równoważności oznacza bycie tą samą liczbą kardynalną.

Narzuca się pomysł, by podobnie jak w przypadku zbiorów skończonych, przypisanie zbiorowi A liczby kardynalnej $|A|$ wiązało się ze wskazaniem pewnego *wzorcowego* zbioru równolicznego z A. Takie postępowanie jest tym bardziej naturalne, że jak zauważyliśmy w wykładzie 9 (zob. uwagę po przykładzie 9.12) równoliczność zbiorów ma własności kojarzące się z relacjami równoważności. Podobny problem musieliśmy rozwiązać, chcąc zdefiniować liczby porządkowe (zob. dodatek C). Liczby porządkowe posłużą nam teraz do zdefiniowania liczb kardynalnych.

Przypomnijmy, że (zob. dodatek C) liczbę porządkową κ nazywamy liczbą **początkową**, jeśli każdy właściwy odcinek początkowy zbioru $O(\kappa)$ jest mocy mniejszej niż zbiór $O(\kappa)$.

Przyjmijmy, że **liczby kardynalne są to początkowe liczby porządkowe**. Zatem liczba porządkowa κ jest liczbą kardynalną, jeśli

$$|O(\alpha)| < |O(\kappa)| \quad \text{dla każdej liczby porządkowej } \alpha < \kappa.$$

Pokażemy teraz, że definicja ta spełnia nasze oczekiwania.

Twierdzenie E.1. Dla każdego zbioru A istnieje dokładnie jedna liczba kardynalna κ, dla której $A \sim O(\kappa)$.

Dowód. Weźmy dowolny zbiór A i spróbujmy znaleźć liczbę kardynalną κ, dla której $A \sim O(\kappa)$. Od razu zauważmy, że liczba ta, o ile istnieje, jest jedyna. Istotnie, niech κ i λ będą liczbami kardynalnymi takimi, że $\lambda \neq \kappa$ oraz $A \sim O(\kappa)$ i $A \sim O(\lambda)$. Bez ograniczenia ogólności załóżmy, że $\lambda < \kappa$. Wtedy jednak $O(\lambda)$, jako właściwy odcinek początkowy zbioru $O(\kappa)$, jest mocy mniejszej niż zbiór $O(\kappa)$, gdyż κ jest liczbą początkową. Wynika stąd, że $A \not\sim O(\lambda)$, sprzeczność.

Dla dowodu istnienia, zdefiniujmy liczbę porządkową κ jako najmniejszą liczbę porządkową α taką, że zbiór A jest równoliczny ze zbiorem $O(\alpha)$.

Zauważmy, że definicja ta jest poprawna, tzn. istnieją liczby porządkowe o własności $A \sim O(\alpha)$, a wśród nich jest liczba najmniejszą (zob. uwagę po twierdzeniu C.14). Istotnie, twierdzenie Zermelo mówi, że istnieje pewna relacja $\preceq$ dobrze porządkująca zbiór A; niech $\alpha = \mathrm{typ}(A, \preceq)$. Wówczas izomorfizm zbiorów dobrze uporządkowanych $\langle A, \preceq \rangle$ oraz $\langle O(\alpha), \leq \rangle$ ustala równoliczność zbiorów A i $O(\alpha)$.

Oczywiste jest też, że κ jest liczbą kardynalną. Jeśli bowiem $\beta < \kappa$, to z definicji liczby κ wynika, ze $A \not\sim O(\beta)$, więc $O(\beta) \not\sim O(\kappa)$. Ponadto $O(\beta) \subseteq O(\kappa)$, więc $|O(\beta)| < |O(\kappa)|$. ■

Mocą zbioru A nazywamy tę jedyną liczbę kardynalną κ, dla której $A \sim O(\kappa)$. Moc zbioru A oznaczamy symbolem $|A|$. Jeśli $|A| = \kappa$, to mówimy, że **zbiór** A **ma moc** κ lub **jest zbiorem mocy** κ. Z dowodu twierdzenia E.1 wynika, że moc zbioru A jest najmniejszą liczbę porządkową α taką, że $A \sim O(\alpha)$.

Wniosek E.2. Dla dowolnych zbiorów A i B

$$A \sim B \;\Leftrightarrow\; |A| = |B|$$

(znak równości po prawej stronie powyższej równoważności oznacza, że liczby kardynalne $|A|$ i $|B|$ są identyczne). ■

Zauważmy, że wcześniej pisaliśmy $|A| = |B|$, chcąc wyrazić równoliczność zbiorów A i B. Wprowadzenie symbolu $|A|$ na oznaczenie mocy zbioru jest z tym zgodne.

Przypomnijmy też, że skończone liczby porządkowe utożsamiliśmy z liczbami naturalnymi. Zatem liczby naturalne to skończone liczby kardynalne i jeśli A jest zbiorem skończonym, to symbol $|A|$ zachowuje swój wcześniejszy sens. Moc zbioru jest więc uogólnieniem pojęcia liczby elementów zbioru.

Również, jak się zaraz przekonamy, oznaczenia $|A| \leq |B|$ i $|A| < |B|$, rozumiane jako nierówności między liczbami porządkowymi $|A|$ i $|B|$, wyrażają to samo, co dotąd.

Twierdzenie E.3. Dla dowolnych zbiorów A i B

(1) $|A| < |B|$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór A jest mocy mniejszej niż zbiór B.

(2) $|A| \leq |B|$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór A jest mocy nie większej niż zbiór B.

Dowód. Niech $|A| = \kappa$ i $|B| = \lambda$. Wtedy $A \sim O(\kappa)$ i $B \sim O(\lambda)$.

Dla dowodu punktu (1) wystarczy zauważyć, że $\kappa < \lambda$ wtedy i tylko wtedy, gdy $O(\kappa) \subsetneq O(\lambda)$, co jest równoważne temu, że zbiór $O(\kappa)$ jest mocy mniejszej niż zbiór $O(\lambda)$.

Punkt (2) wynika natychmiast z punktu (1). ■

Wniosek E.4. Dla dowolnych zbiorów A, B, gdzie $A \neq \emptyset$, oraz liczby kardynalnej κ

(1) $\kappa \leq |B|$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór B zawiera podzbiór mocy κ.

(2) $|A| \leq \kappa$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg pozaskończony $\langle a_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa}$ typu κ taki, że $A = \{a_\alpha : \alpha < \kappa\}$.

Dowód. Zauważmy, że $\kappa = |O(\kappa)|$ i skorzystajmy z twierdzenia E.3 (punkt (2)).

Punkt (1) wynika stąd natychmiast, a dla dowodu punktu (2) wystarczy przypomnieć, że zgodnie z twierdzeniem 6.11 nierówność $|A| \leq |O(\kappa)|$, gdzie $A \neq \varnothing$, jest równoważna istnieniu funkcji z $O(\kappa)$ na A. ■

Można więc powiedzieć, że *niepusty zbiór A jest mocy co najwyżej κ wtedy i tylko wtedy, gdy jego elementy można ustawić w ciąg pozaskończony typu κ.*

Kolejne twierdzenie przedstawia podstawowe własności liczb kardynalnych.

Twierdzenie E.5. Dla dowolnej liczby porządkowej α

(1) α jest liczbą kardynalną wtedy i tylko wtedy, gdy $|O(\alpha)| = \alpha$; ponadto, jeśli α nie jest liczbą kardynalną, to $|O(\alpha)| < \alpha$,

(2) α jest liczbą kardynalną wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta < |O(\alpha)|$ dla każdej liczby porządkowej $\beta < \alpha$,

(3) α jest liczbą kardynalną wtedy i tylko wtedy, gdy $|O(\beta)| \geq \alpha$ dla każdej liczby porządkowej $\beta \geq \alpha$,

(4) jeśli α jest nieskończoną liczbą kardynalną, to α jest graniczną liczbą porządkową, tzn. $\beta < \alpha \Rightarrow \beta + 1 < \alpha$.

Dowód. Najpierw załóżmy, że α jest liczbą kardynalną i pokażmy, że ma wówczas własności z punktów (1) – (4).

Oczywiście $|O(\alpha)| = \alpha$, gdyż właśnie $\kappa = \alpha$ jest taką liczbą kardynalną, dla której $O(\alpha) \sim O(\kappa)$.

Jeśli $\beta < \alpha$, to $\beta < |O(\alpha)|$, gdyż jak zauważyliśmy, $|O(\alpha)| = \alpha$.

Jeśli $\beta \geq \alpha$, to oczywiście $|O(\beta)| \geq |O(\alpha)| = \alpha$.

Załóżmy wreszcie, że liczba kardynalna α jest nieskończona (tzn. zbiór $O(\alpha)$ jest nieskończony) i przypuśćmy, że $\alpha = \beta + 1$ dla pewnej liczby porządkowej

$\beta < \alpha$. Wtedy $O(\alpha) = O(\beta) \cup \{\beta\}$, a stąd $|O(\beta)| = |O(\alpha) \setminus \{\beta\}| = |O(\alpha)| = \alpha$, gdyż usunięcie jednego elementu ze zbioru nieskończonego nie zmienia jego mocy (zob. twierdzenie 7.15). To jednakże przeczy założeniu, że α jest liczbą kardynalną.

Teraz przyjmijmy, że α nie jest liczbą kardynalną. Wtedy $|O(\alpha)| \neq \alpha$, gdyż moc dowolnego zbioru jest liczbą kardynalną. Nie jest więc spełniony warunek z punktu (1). Co więcej, jeśli $|O(\alpha)| = \beta$, to $\beta < \alpha$. Istotnie, w przeciwnym razie $\alpha < \beta$, a stąd $|O(\alpha)| < |O(\beta)| = \beta$, gdyż β jest liczbą kardynalną. To jednak przeczy definicji liczby β. W szczególności liczba $\beta = |O(\alpha)|$ jest taką liczbą mniejszą od α, dla której nie jest prawdą, że $\beta < |O(\alpha)|$. Nie zachodzi więc warunek z punktu (2).

Na koniec zauważmy, że z udowodnionej wcześniej nierówności $|O(\alpha)| < \alpha$ wynika zaprzeczenie warunku z punktu (3). ■

Zauważmy, że z każdym zbiorem A związaliśmy dwa obiekty, które jednoznacznie określają jego liczebność: moc zbioru A, czyli liczbę kardynalną $\kappa = |A|$ oraz zbiór $O(\kappa)$ – wzorcowy zbiór tej właśnie mocy. Jeśli definiuje się liczby porządkowe metodą von Neumanna, to $\kappa = O(\kappa)$ i każda liczba kardynalna sama jest wzorcowym zbiorem mocy κ – zbiorem wszystkich liczb *porządkowych* od niej mniejszych. W tym rozdziale nie będziemy jednak z tego utożsamienia korzystać. Przypomnijmy natomiast, że liczbę porządkową α nazywamy skończoną (odp. nieskończoną, przeliczalną, nieprzeliczalną itp.), jeśli zbiór $O(\alpha)$ jest skończony (odp. nieskończony, przeliczalny, nieprzeliczalny, itd.).

Przykład E.6. Nie każda graniczna liczba porządkowa jest liczbą kardynalną. Liczbą kardynalną nie jest na przykład żadna przeliczalna liczba porządkowa graniczna oprócz liczby ω; w szczególności liczby $\omega + \omega$, $\omega \cdot \omega$ i ω^ω nie są liczbami kardynalnymi. ■

Najmniejszą nieskończoną liczbę kardynalną jest najmniejsza nieskończona liczba porządkowa ω. Jest to moc zbioru liczb naturalnych. Tę liczbę kardynalną oznacza się też symbolami ω_0 lub $\aleph_0$ (**alef zero**). Mamy więc $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ i zbiory przeliczalne nazywamy często zbiorami mocy alef zero. Zbiór A jest nieskończony wtedy i tylko wtedy, gdy $|A| \geq \aleph_0$.

Najmniejszą nieprzeliczalną liczbę kardynalną jest najmniejsza nieprzeliczalna liczba porządkowa ω_1. Oznacza się ją też symbolem $\aleph_1$ (**alef jeden**). Jest ona najmniejszą liczbą kardynalną większą od $\aleph_0$. Zbiór A jest nieprzeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy $|A| \geq \aleph_1$.

Liczby kardynalne $\aleph_0$ i $\aleph_1$ stanowią początek skali nieskończonych liczb kardynalnych, tzw. **skali alefów**:

$$\aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega,\ \aleph_{\omega+1}, \ldots$$

czyli rosnącej numeracji kolejnych nieskończonych liczb kardynalnych za pomocą liczb porządkowych.

Dokładniej, $\aleph_\alpha$ (**alef alfa**), gdzie α jest liczbą porządkową, oznacza liczbę kardynalną κ taką, że typ porządkowy zbioru wszystkich nieskończonych liczb kardynalnych mniejszych od κ (dobrze uporządkowanego przez relację $\leq$ porównywania liczb porządkowych) jest równy α. Mówiąc nieformalnie, $\aleph_\alpha$ jest α-tą, licząc od zera, nieskończoną liczbą kardynalną.

Oczywiście każda nieskończona liczba kardynalna κ jest równa $\aleph_\alpha$ dla (dokładnie jednej) liczby porządkowej α danej wzorem:

$$\alpha = \mathrm{typ}(\{\lambda \in O(\kappa) : \ \lambda \text{ jest nieskończoną liczbą kardynalną}\}).$$

Istnienie liczby $\aleph_\alpha$ dla dowolnej liczby porządkowej α uzyskamy jako wniosek z następującego twierdzenia, które raz jeszcze potwierdza poczynioną w wykładzie 6 uwagę, że istnieje niezmierne bogactwo mocy zbiorów nieskończonych (zob. twierdzenia 6.27).

Twierdzenie E.7.

(1) Dla każdej liczby porządkowej γ istnieje liczba kardynalna większa od γ.

(2) Dla każdego zbioru A, złożonego z liczb kardynalnych, istnieje liczba kardynalna większa od wszystkich liczb ze zbioru A.

(3) Nie istnieje zbiór, złożony ze wszystkich liczb kardynalnych.

Dowód. Dla dowodu punktu (1) wystarczy zauważyć, że na mocy twierdzenia Cantora mamy

$$|\mathcal{P}(O(\gamma))| > |O(\gamma)|.$$

Zatem z twierdzenia E.5 (punkt (3)) wynika, że

$$|\mathcal{P}(O(\gamma))| > \gamma.$$

Jeśli A jest zbiorem, złożonym z liczb kardynalnych, to z twierdzenia C.18 (punkt (1)) wynika, że istnieje liczba porządkowa γ większa od wszystkich liczb ze zbioru A. Wystarczy teraz skorzystać z punktu (1).

Punkt (3) wynika natychmiast z punktu (2). ■

Wniosek E.8. Dla dowolnej liczby porządkowej α istnieje liczba kardynalna $\aleph_\alpha$.

Dowód. Dla $\alpha = 0$ mamy $\aleph_0 = \omega$. Niech więc $\alpha > 0$ i załóżmy, że dla każdej liczby porządkowej $\beta < \alpha$ istnieje $\aleph_\beta$. Pokażemy, że wynika stąd istnienie liczby $\aleph_\alpha$, co na mocy zasady indukcji pozaskończonej zakończy dowód.

Rozważmy zbiór liczb kardynalnych $A = \{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}$. Z twierdzenia E.7 wynika, że istnieją liczby kardynalne większe od każdej liczby ze zbioru A; niech κ będzie najmniejszą z nich. Twierdzimy, że $\kappa = \aleph_\alpha$.

Niech więc

$$B = \{\lambda \in O(\kappa) : \lambda \text{ jest nieskończoną liczbą kardynalną}\}, \text{ oraz } \beta = \mathrm{typ}(B, \leq);$$

wtedy $\kappa = \aleph_\beta$ i chcemy pokazać, że $\beta = \alpha$.

Zauważmy, że $\mathrm{typ}(A, \leq) = \alpha$, gdyż funkcja $f : O(\alpha) \longrightarrow A$ dana wzorem $f(\beta) = \aleph_\beta$, jest izomorfizmem. Wystarczy więc udowodnić, że $B = A$. Zawieranie $A \subseteq B$ wynika wprost z definicji liczby κ. Dla dowodu inkluzji odwrotnej weźmy $\lambda \in B$. Wtedy $\lambda = \aleph_\delta$ dla pewnej liczby porządkowej δ. Co więcej, $\delta < \alpha$, gdyż w przeciwnym razie liczba $\lambda = \aleph_\delta$ byłaby większa od wszystkich liczb ze zbioru A i zarazem mniejsza od liczby κ, wbrew jej definicji. Zatem $\lambda \in A$, co kończy dowód. ■

Na oznaczenie liczby $\aleph_\alpha$ ożywa się też symbolu ω_α; zwyczajowo, $\aleph_\alpha$ oznacza na ogół moc zbioru, zaś ω_α – typ porządkowy zbioru dobrze uporządkowanego (o ile jest on liczbą kardynalną). Formalnie jednak mamy: $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$.

Moc zbioru liczb rzeczywistych nazywa się **continuum** i oznacza symbolem $\mathfrak{c}$. Mamy więc $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$; w wykładzie 8 pokazaliśmy wiele innych przykładów zbiorów mocy continuum.

Oczywiście liczba $\mathfrak{c}$ znajduje się gdzieś na skali alefów powyżej liczby $\aleph_0$. Cantor przypuszczał, że $\mathfrak{c} = \aleph_1$ i zdanie to nazywane jest **hipotezą continuum** (w skrócie CH od angielskiej nazwy *Continuum Hypothesis*). Jak jednak wspomnieliśmy w wykładzie 8, jest ono niezależne od aksjomatów teorii mnogości ZFC. Z jednej strony można je przyjąć jako *dodatkowy aksjomat*, z drugiej strony Cohen pokazał, że *dodatkowym aksjomatem* może być *każde z osobna* ze zdań postaci $\mathfrak{c} = \aleph_2$, $\mathfrak{c} = \aleph_3$ itd. (ale już na przykład *nie może* nim być żadna z równości $\mathfrak{c} = \aleph_\omega$, $\mathfrak{c} = \aleph_{\omega+\omega}$ lub $\mathfrak{c} = \aleph_{\omega^\omega}$, gdyż są one po prostu fałszywe – zob. twierdzenie E.21).

Na liczbach kardynalnych można wykonywać działania, analogiczne do działań arytmetycznych na liczbach naturalnych.

Dla liczb kardynalnych κ i λ definiujemy

(1) **sumę (kardynalną)** wzorem

$$\kappa + \lambda = |A \cup B|, \quad \text{gdzie} \quad |A| = \kappa,\ |B| = \lambda \text{ oraz } A \cap B = \varnothing,$$

(2) **iloczyn (kardynalny)** wzorem

$$\kappa \cdot \lambda = |A \times B|, \quad \text{gdzie} \quad |A| = \kappa,\ |B| = \lambda,$$

(3) **potęgę (kardynalną)** wzorem

$$\kappa^\lambda = |A^B|, \quad \text{gdzie} \quad |A| = \kappa,\ |B| = \lambda.$$

W powyższych definicjach A i B są *dowolnymi* zbiorami takimi, że $|A| = \kappa$ i $|B| = \lambda$, a w przypadku definicji sumy dodatkowo zakładamy, że $A \cap B = \varnothing$. Poprawność tych definicji (zdefiniowane liczby kardynalne zależą jedynie od liczb kardynalnych κ i λ) opiera się na następującym lemacie, będącym przypomnieniem poznanych już wcześniej faktów (zob. lematy 8.7 i 8.16).

Lemat E.9. Niech $A_1 \sim A_2$ i $B_1 \sim B_2$. Wtedy

(1) jeśli $A_1 \cap B_1 = A_2 \cap B_2 = \varnothing$, to $A_1 \cup B_1 \sim A_2 \cup B_2$,

(2) $A_1 \times B_1 \sim A_2 \times B_2$,

(3) $A_1^{B_1} \sim A_2^{B_2}$. ■

Innymi słowy, moce zbiorów A^B, $A \times B$ oraz $A \cup B$ (w tym ostatnim przypadku zakładamy, że $A \cap B = \varnothing$) zależą wyłącznie od mocy zbiorów A i B.

Wniosek E.10. Dla dowolnych zbiorów A i B:

(1) $|A| + |B| = |A \cup B|$, o ile $A \cap B = \varnothing$,

(2) $|A| \cdot |B| = |A \times B|$,

(3) $|A|^{|B|} = |A^B|$. ■

Wprost z definicji i własności odpowiednich działań na zbiorach łatwo wynika, że suma kardynalna i iloczyn kardynalny są działaniami przemiennymi, łącznymi, a mnożenie jest rozdzielne względem dodawania:

$$\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu.$$

Odnotujmy również następujące prawa motoniczności, których łatwe dowody pozostawiamy jako ćwiczenie.

(1) $\kappa \leq \lambda \Rightarrow \kappa + \mu \leq \lambda + \mu$,

(2) $\kappa \leq \lambda \Rightarrow \kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \mu$,

(3) $\kappa \leq \lambda \Rightarrow \kappa^\mu \leq \lambda^\mu$,

(4) $\kappa \leq \lambda \Rightarrow \mu^\kappa \leq \mu^\lambda$.

Poza tym potęgowanie kardynalne ułatwiają następujące wzory, uogólniające znane prawa arytmetyki liczb naturalnych.

Twierdzenie E.11. Dla dowolnych liczb kardynalnych κ, λ i μ zachodzą wzory

(1) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$,

(2) $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$,

(3) $\kappa^{\lambda + \mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$.

Dowód. Weźmy dowolne zbiory A, B i C takie, że $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$, $|C| = \mu$. Ponieważ wówczas

$$|(A^B)^C| = (\kappa^\lambda)^\mu \qquad \text{oraz} \qquad |A^{B \times C}| = \kappa^{\lambda \cdot \mu},$$

więc dla dowodu wzoru (1) wystarczy pokazać, że

$$(A^B)^C \sim A^{B \times C}.$$

Określmy zatem odwzorowanie

$$\Phi : (A^B)^C \longrightarrow A^{B\times C}$$

w następujący sposób. Niech $f \in (A^B)^C$, czyli $f : C \longrightarrow A^B$. Jeśli więc f_c oznacza wartość funkcji f w punkcie $c \in C$, to f_c jest pewną funkcją ze zbioru B w zbiór A. Wartością odwzorowania Φ dla argumentu f ma być pewna funkcja $\Phi(f) = g : B \times C \longrightarrow A$. Określmy ją wzorem

$$g(b, c) = f_c(b) \quad \text{dla} \quad b \in B,\ c \in C.$$

Odwzorowanie Φ jest różnowartościowe. Istotnie, jeśli $f, h \in (A^B)^C$ oraz $f \neq h$, to $f_c \neq h_c$ dla pewnego $c \in C$. Zatem $f_c(b) \neq h_c(b)$ dla pewnego $b \in B$. To jednak znaczy, że $\Phi(f)(b, c) \neq \Phi(h)(b, c)$, czyli $\Phi(f) \neq \Phi(h)$.

Zauważmy następnie, że przeciwdziedziną odwzorowania Φ jest zbiór $A^{B\times C}$. Mianowicie, dowolna funkcja $g : B\times C \longrightarrow A$ jest postaci $\Phi(f)$ dla funkcji $f \in (A^B)^C$ określonej wzorem

$$f_c(b) = g(b, c) \quad \text{dla} \quad b \in B,\ c \in C.$$

Odwzorowanie Φ ustala zatem równoliczność zbiorów $(A^B)^C$ i $A^{B\times C}$.

Podobnie,

$$|(A \times B)^C| = (\kappa \cdot \lambda)^\mu \qquad \text{oraz} \qquad |A^C \times B^C| = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu,$$

więc dla dowodu wzoru (2) wystarczy pokazać, że

$$(A \times B)^C \sim A^C \times B^C.$$

Niech funkcje $p_A : A \times B \longrightarrow A$ oraz $p_B : A \times B \longrightarrow B$ będą rzutowaniami, odpowiednio, na oś A oraz oś B, tzn.

$$p_A(a, b) = a \qquad \text{oraz} \qquad p_B(a, b) = b \qquad \text{dla} \quad \langle a, b\rangle \in A \times B.$$

Zdefiniujmy odwzorowanie

$$\Psi : (A \times B)^C \longrightarrow A^C \times B^C$$

za pomocą wzoru

$$\Psi(g) = \langle p_1 \circ g, p_2 \circ g\rangle \quad \text{dla} \quad g \in (A \times B)^C.$$

Odwzorowanie Ψ przyporządkowuje więc funkcji $g : C \longrightarrow (A \times B)$ parę takich funkcji: $g_1 : C \longrightarrow A$ oraz $g_2 : C \longrightarrow B$, że $g(c) = \langle g_1(c), g_2(c)\rangle$ dla każdego $c \in C$. Łatwe sprawdzenie, że przekształca ono wzajemnie jednoznacznie zbiór $(A \times B)^C$ na zbiór $A^C \times B^C$, pozostawiamy jako ćwiczenie (zob. zadanie 5.5). ■

W końcu, jeśli dodatkowo założymy, że $B \cap C = \varnothing$, to

$$|A^{B\cup C}| = \kappa^{\lambda+\mu} \qquad \text{oraz} \qquad |A^B \times A^C| = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu,$$

więc dowód wzoru (3) sprowadza się do pokazania, że

$$A^{B\cup C} \sim A^B \times A^C.$$

Określmy więc odwzorowanie

$$\Theta : A^{B\cup C} \longrightarrow A^B \times A^C$$

wzorem

$$\Theta(g) = \langle g|B, g|C\rangle \quad \text{dla} \quad g \in A^{B\cup C}.$$

Odwzorowanie Θ przyporządkowuje więc funkcji $g : B \cup C \longrightarrow A$ parę funkcji: $g|B : B \longrightarrow A$ oraz $g|C : C \longrightarrow A$. Rutynowe sprawdzenie, że przekształca ono wzajemnie jednoznacznie zbiór $A^{B\cup C}$ na zbiór $A^B \times A^C$, pozostawiamy również jako ćwiczenie (zob. podobne rozumowanie w dowodzie twierdzenia 7.9 – dodatek B oraz zadanie 5.6). ■

Zauważmy, że sumę i iloczyn liczb kardynalnych oznaczyliśmy tymi samymi symbolami, co odpowiednie działania na liczbach porządkowych. Teoretycznie może to prowadzić do nieporozumień, gdyż liczby kardynalne są pewnymi liczbami porządkowymi. Na ogół jednak z kontekstu jasno wynika, o jakie działanie chodzi w konkretnym wypadku.

Jak widzimy, twierdzeniom teorii równoliczności można nadawać formę wzorów arytmetyki liczb kardynalnych. Zapiszemy teraz w ten sposób szereg faktów, dotyczących przede wszystkim zbiorów co najwyżej przeliczalnych i zbiorów mocy continuum, które udowodniliśmy w toku wykładów poświęconych równoliczności.

Twierdzenie E.12.

(1) $2^\kappa > \kappa$ dla dowolnej liczby kardynalnej κ,

(2) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$,

(3) $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$,

(4) ${\aleph_0}^n = \aleph_0$ dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$,

(5) $2^{\aleph_0} = {\aleph_0}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$,

(6) $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$,

(7) $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$,

(8) $\mathfrak{c}^n = \mathfrak{c}$ dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$,

(9) $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$,

(10) $2^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$.

Dowód. Powyższe wzory wyrażają odpowiednio następujące fakty:

(1) twierdzenie Cantora (por. twierdzenie 6.6); wystarczy zauważyć, że dla każdego zbioru A mamy
$$|\mathcal{P}(A)| = |\{0,1\}^A| = 2^{|A|}.$$

(2) suma dwóch zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym (por. wniosek 7.24),

(3) iloczyn kartezjański dwóch zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym (por. twierdzenie 7.28),

(4) zbiór wszystkich ciągów ustalonej skończonej długości $n > 0$ o wyrazach w danym zbiorze przeliczalnym jest zbiorem przeliczalnym (por. twierdzenie 7.33),

(5) zbiór wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach w zbiorze $\{0,1\}$, a także zbiór wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach w danym zbiorze przeliczalnym są zbiorami mocy continuum (por. twierdzenie 8.1),

(6) suma dwóch zbiorów mocy continuum jest zbiorem mocy continuum (por. twierdzenie 8.10),

(7) iloczyn kartezjański dwóch zbiorów mocy continuum jest zbiorem mocy continuum (por. twierdzenie 8.8),

(8) zbiór wszystkich ciągów ustalonej skończonej długości $n > 0$ o wyrazach w danym zbiorze mocy continuum jest zbiorem mocy continuum (por. twierdzenie 8.12),

(9) zbiór wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach w danym zbiorze mocy continuum jest zbiorem mocy continuum (por. twierdzenie 8.17),

(10) rodzina wszystkich podzbiorów zbioru $\mathbb{R}$ jest równoliczna ze zbiorem wszystkich funkcji rzeczywistych (por. twierdzenie 8.32).

Przy okazji zauważmy, że dowody niektórych z powyższych wzorów można zredagować w zwięzły sposób, posługując się poznanymi w twierdzeniu E.11 prawami potęgowania liczb kardynalnych. Przykładowo

(7) $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$,

(9) $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$,

(10) $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\mathfrak{c}} = 2^{\aleph_0 \cdot \mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$. ■

W wykładach 8 i 13 wspominaliśmy o twierdzeniu Hessenberga, które mówi, że *jeśli T jest zbiorem nieskończonym, to $T \times T \sim T$*. W języku liczb kardynalnych stanowi ono uogólnienie wzorów:

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \quad \text{oraz} \quad \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}.$$

Twierdzenie E.13. (Hessenberg) Dla dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej κ zachodzi równość

$$\kappa \cdot \kappa = \kappa. \tag{$*$}$$

Pokażemy dwa niezależne dowody twierdzenia Hessenberga. Pierwszy z nich oparty będzie na lemacie Kuratowskiego-Zorna.

Dowód twierdzenia Hessenberga – wersja I. Niech T będzie dowolnym zbiorem mocy κ. Definiujemy zbiór X złożony z funkcji f o następujących własnościach:

(1) zbiór D_f jest nieskończony,

(2) $D_f \subseteq T$,

(3) $R_f = D_f \times D_f$,

(4) funkcja f jest różnowartościowa.

Pokażemy, że zbiór X, częściowo uporządkowany przez relację inkluzji, spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna.

Zauważmy najpierw, że $X \neq \varnothing$. Istotnie, skoro zbiór T jest nieskończony, to zawiera podzbiór przeliczalny S. Istnieje więc funkcja $f : S \xrightarrow[\text{na}]{1-1} S \times S$ i wówczas $f \in X$.

Niech teraz L będzie niepustym łańcuchem w zbiorze X; pokażemy, że zbiór $h = \bigcup L$ należy do X.

Rozumując tak, jak w dowodzie twierdzenia 13.7, stwierdzamy bez trudu, że h jest funkcją różnowartościową. Ponadto

$$D_h = \bigcup \{D_f : f \in L\} \subseteq T$$

i zbiór D_h jest nieskończony, gdyż $L \neq \varnothing$. Analogicznie,

$$R_h = \bigcup \{R_f : f \in L\} = \bigcup \{D_f \times D_f) : f \in L\} \subseteq D_h \times D_h.$$

Dla wykazania, że $h \in X$, pozostaje udowodnić zawieranie $D_h \times D_h \subseteq R_h$.

Weźmy więc dowolne elementy $t_1, t_2 \in D_h$. Istnieją wtedy funkcje $f_1, f_2 \in L$ takie, że $t_1 \in D_{f_1}$ oraz $t_2 \in D_{f_2}$. Ale L jest zbiorem liniowo uporządkowanym przez relację inkluzji, zatem jedna z tych funkcji, powiedzmy f_2, zawiera drugą. Wynika stąd, że $t_1, t_2 \in D_{f_2}$. Ale $f_2 \in L$, więc $D_{f_2} \times D_{f_2} = R_{f_2}$. Zatem $\langle t_1, t_2 \rangle \in R_{f_2}$, co implikuje, że $\langle t_1, t_2 \rangle \in R_h$.

Skoro suma każdego niepustego łańcucha w X należy do X, to z lematu Kuratowskiego-Zorna (zob. twierdzenie 13.2) wynika, że w rodzinie X istnieje element maksymalny g. Niech $D_g = A$ oraz $\lambda = |A|$. Zauważmy, że funkcja g świadczy o tym, że $A \times A \sim A$. Wynika stąd, że $\lambda \times \lambda = \lambda$. Dla zakończenia dowodu wystarczy więc pokazać, że $\lambda = \kappa$.

Przypuśćmy, że jest przeciwnie, czyli $\lambda < \kappa$. Zauważmy, że skoro λ jest nieskończoną liczbą kardynalną oraz $\lambda \times \lambda = \lambda$, to z twierdzenia 8.11 wynika, że suma skończenie wielu zbiorów mocy co najwyżej λ jest zbiorem mocy co najwyżej λ. W szczególności, $|T \setminus A| > \lambda$, gdyż w przeciwnym wypadku zbiór T byłby mocy co najwyżej λ jako suma zbiorów A oraz $T \setminus A$, mocy co najwyżej λ.

Skoro $|T \setminus A| > \lambda$, to z wniosku E.4 (punkt 1.) wynika, że istnieje zbiór $B \subseteq T \setminus A$ mocy λ. Niech $C = A \cup B$; oczywiście zbiór C jest mocy λ, jako suma dwóch zbiorów mocy λ. Znajdziemy funkcję

$$f : C \xrightarrow[\text{na}]{1-1} C \times C,$$

taką że $f|A = g$. Istnienie takiej funkcji przeczy maksymalności funkcji g w zbiorze X i uzyskana sprzeczność zakończy dowód.

Zauważmy, że

$$C \times C = (A \times A) \cup (A \times B) \cup (B \times A) \cup (B \times B)$$

i zbiory występujące po prawej stronie powyższej równości są parami rozłączne.

Zatem

$$(C \times C) \setminus (A \times A) = (A \times B) \cup (B \times A) \cup (B \times B).$$

Stąd wynika, że

$$|(C \times C) \setminus (A \times A)| = \lambda$$

Istotnie, każdy ze zbiorów $A \times B$, $B \times A$, $B \times B$ ma moc λ, jako iloczyn kartezjański dwóch zbiorów mocy λ; ich suma ma więc też moc λ.

Zatem w szczególności,

$$B \sim (C \times C) \setminus (A \times A);$$

Funkcję $f : C \xrightarrow[\text{na}]{1-1} C \times C$ określamy teraz w następujący sposób: $f|A = g$, natomiast jako $f|B$ bierzemy dowolną funkcję ustalającą równoliczność zbiorów B oraz $(C \times C) \setminus (A \times A)$. ■

Drugi dowód twierdzenia Hessenberga przeprowadzimy przez indukcję pozaskończoną. Mianowicie, chcąc udowodnić, że każda nieskończona liczba kardynalna ma pewną własność $W(x)$ wystarczy pokazać, że dla każdej liczby porządkowej α zachodzi warunek

$$\Big(\forall \beta < \alpha \ W(\aleph_\beta)\Big) \ \Rightarrow \ W(\aleph_\alpha).$$

Równoważnie, po pierwsze należy pokazać, że $W(\aleph_0)$; następnie wziąć liczbę kardynalną $\kappa > \aleph_0$, jako założenie indukcyjne przyjąć, że $W(\lambda)$ dla każdej nieskończonej liczby kardynalnej $\lambda < \kappa$ i wyprowadzić stąd wniosek, że $W(\kappa)$.

Dowód twierdzenia Hessenberga – wersja II. Po pierwsze zauważmy, że dla $\kappa = \aleph_0$ wzór $(*)$ zachodzi.

Niech teraz $\kappa > \aleph_0$ i załóżmy (założenie indukcyjne), że równość $(*)$ jest prawdziwa dla każdej nieskończonej liczby kardynalnej $\lambda < \kappa$. Pokażemy, że jest ona również prawdziwa dla κ.

W zbiorze $O(\kappa) \times O(\kappa)$ wprowadźmy porządek liniowy $\preceq$ w następujący sposób:

$\langle \beta, \xi \rangle \preceq \langle \delta, \eta \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\max(\beta,\xi) < \max(\delta,\eta)) \vee (\max(\beta,\xi) = \max(\delta,\eta) \wedge \langle \beta, \xi \rangle \leq_{leks} \langle \delta, \eta \rangle),$$

gdzie $\leq_{leks}$ oznacza relację porządku leksykograficznego w zbiorze $O(\kappa) \times O(\kappa)$ (sprawdzenie, że relacja $\preceq$ rzeczywiście jest porządkiem liniowym pozostawiamy jako ćwiczenie).

Zauważmy, że relacja $\preceq$ dobrze porządkuje zbiór $O(\kappa) \times O(\kappa)$. Mianowicie, niech A będzie niepustym podzbiorem zbioru $O(\kappa) \times O(\kappa)$. Niech γ będzie najmniejszą liczbą porządkową w zbiorze

$$W = \{\max(\delta,\eta) : \ \langle \delta, \eta \rangle \in A\}.$$

Rozważmy zbiór

$$\tilde{A} = \{\langle \delta, \eta \rangle \in A : \ \max(\delta,\eta) = \gamma\}.$$

Z twierdzenia 12.3 (punkt (4)) wynika, że w zbiorze $\tilde{A}$ istnieje element najmniejszy $\langle \beta, \xi \rangle$ w sensie porządku $\leq_{leks}$. Korzystając z definicji porządku $\preceq$ łatwo sprawdzić, że $\langle \beta, \xi \rangle$ jest szukanym elementem najmniejszym zbioru A w sensie tego porządku.

Niech

$$\alpha = \mathrm{typ}(O(\kappa) \times O(\kappa), \preceq).$$

Pokażemy, że $\alpha = \kappa$, co zakończy dowód, gdyż wówczas w szczególności

$$O(\kappa) \times O(\kappa) \sim O(\kappa),$$

co jest równoważne równości $(*)$.

Dla dowodu nierówności $\alpha \geq \kappa$ zauważmy, że funkcja $\xi \mapsto \langle 0, \xi \rangle$ jest izomorficznym włożeniem zbioru $O(\kappa)$, typu porządkowego κ, w zbiór dobrze uporządkowany (przez relację $\preceq$) $O(\kappa) \times O(\kappa)$, typu porządkowego α.

Dla dowodu nierówności odwrotnej oszacujmy moc dowolnego właściwego odcinka początkowego $O_{\preceq}(\langle \delta, \eta \rangle)$, gdzie $\delta, \eta < \kappa$. Z definicji porządku $\preceq$ wynika, że jeśli $\langle \beta, \xi \rangle \preceq \langle \delta, \eta \rangle$, to $\beta, \xi \leq \max(\delta, \eta)$. Zatem

$$O_{\preceq}(\langle \delta, \eta \rangle) \subseteq O(\gamma) \times O(\gamma),$$

gdzie $\gamma = \max(\delta, \eta) + 1$. Zauważmy też, że skoro $\delta, \eta < \kappa$, to również $\gamma < \kappa$, gdyż na mocy twierdzenia E.5 (punkt (4)) κ jest graniczną liczbą porządkową. Stąd $|O(\gamma)| < \kappa$, a więc $|O(\gamma)| = \lambda$ dla pewnej nieskończonej liczby kardynalnej $\lambda < \kappa$.

Z założenia indukcyjnego otrzymujemy teraz

$$|O(\gamma) \times O(\gamma)| = \lambda \cdot \lambda = \lambda,$$

skąd ostatecznie

$$|O_{\preceq}(\langle \delta, \eta \rangle)| \leq \lambda < \kappa.$$

Pokazaliśmy, że moc dowolnego właściwego odcinka początkowego zbioru dobrze uporządkowanego $\langle O(\kappa) \times O(\kappa), \preceq \rangle$ jest mniejsza od κ. Ponieważ

$$\alpha = \mathrm{typ}(O(\kappa) \times O(\kappa), \preceq),$$

więc również dowolny właściwy odcinek początkowy zbioru dobrze uporządkowanego $\langle O(\alpha) \leq \rangle$ jest mocy mniejszej od κ: $|O(\beta)| < \kappa$ dla każdej liczby porządkowej

$\beta < \alpha$. To dowodzi, że $\alpha \leq \kappa$; w przeciwnym razie $\kappa < \alpha$ i dla $\beta = \kappa$ mielibyśmy $\beta < \alpha$ oraz $|O(\beta)| = |O(\kappa)| = \kappa$, na mocy twierdzenia E.5 (punkt (1)).

Z zasady indukcji pozaskończonej wynika, że wzór $(*)$ jest prawdziwy dla każdej liczby porządkowej. ■

Jak pokazaliśmy w wykładzie 8 (zob. twierdzenie 8.11 i uwagi po nim), z twierdzenia Hessenberga natychmiast wynikają uogólnienia niektórych twierdzeń, które wcześniej udowodniliśmy dla zbiorów co najwyżej przeliczalnych oraz zbiorów mocy co najwyżej continuum. Sformułujemy je teraz w języku liczb kardynalnych, w odniesieniu do zbiorów mocy co najwyżej κ, gdzie κ jest dowolną nieskończoną liczbą kardynalną.

Twierdzenie E.14. Załóżmy, że κ jest nieskończoną liczbą kardynalną. Wtedy

(1) Jeśli $\mathcal{K}$ jest rodziną zbiorów mocy co najwyżej κ (tzn. dla każdego $A \in \mathcal{K}$ mamy $|A| \leq \kappa$) oraz $|\mathcal{K}| \leq \kappa$, to $|\bigcup \mathcal{K}| \leq \kappa$.

(2) $\kappa^n = \kappa$ dla każdej liczby naturalnej $n > 0$.

(3) Zbiór wszystkich skończonych ciągów o wyrazach w zbiorze mocy κ ma moc κ.

(4) Zbiór wszystkich skończonych podzbiorów zbioru mocy κ ma moc κ. ■

Z twierdzenia Hessenberga wynika, że działania sumy i iloczynu liczb kardynalnych, z których co najmniej jedna jest nieskończona, są w gruncie rzeczy bardzo proste.

Twierdzenie E.15. Jeśli κ i λ są liczbami kardynalnymi, z których co najmniej jedna jest nieskończona, to

(1) $\kappa + \lambda = \max(\kappa, \lambda)$,

(2) $\kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda)$, o ile $\kappa, \lambda > 0$.

Dowód. Załóżmy, że $\lambda \leq \kappa$ oraz $\aleph_0 \leq \kappa$. Mamy następujące oszacowania

$$\kappa \leq \kappa + \lambda \leq \kappa + \kappa = 2 \cdot \kappa \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$$

oraz, o ile $\kappa, \lambda > 0$,

$$\kappa \leq \kappa \cdot \lambda \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa,$$

których szczegółowe uzasadnienie pozostawiamy Czytelnikowi. ■

Wniosek E.16. Niech A i B będą dowolnymi zbiorami, z których co najmniej jeden jest nieskończony. Wtedy

(1) $|A \cup B| = \max(|A|, |B|)$,

(2) $|A \times B| = \max(|A|, |B|)$, o ile $A, B \neq \emptyset$. ■

Jako kolejny wniosek otrzymujemy następujące uogólnienie twierdzenia E.14 (punkt (1)). Jego dowód zostawiamy jako ćwiczenie.

Twierdzenie E.17. Niech κ i λ będą liczbami kardynalnymi, z których co najmniej jedna jest nieskończona.

Jeśli $\mathcal{K}$ jest rodziną zbiorów mocy co najwyżej κ (tzn. dla każdego $A \in \mathcal{K}$ mamy $|A| \leq \kappa$) oraz $|\mathcal{K}| \leq \lambda$, to $|\bigcup \mathcal{K}| \leq \max(\kappa, \lambda)$. ■

W wykładzie 8 udowodniliśmy, że żaden zbiór mocy continuum nie jest sumą dwóch swoich podzbiorów mocy mniejszej niż continuum (zob. lemat 8.23). Kolejny wniosek z twierdzenia Hessenberga uogólnienia ten fakt na dowolne zbiory nieskończone.

Twierdzenie E.18. Niech X będzie dowolnym zbiorem nieskończonym oraz $\mathcal{K}$ – skończoną rodziną podzbiorów zbioru X, z których każdy jest mocy mniejszej niż X. Wówczas $|\bigcup \mathcal{K}| < |X|$, w szczególności $\bigcup \mathcal{K} \neq X$.

Dowód. Niech liczba kardynalna λ będzie największym elementem skończonego zbioru $\{|A| : A \in \mathcal{K}\}$. Wtedy $\lambda < |X|$ i z twierdzenia E.17 wynika, że $|\bigcup \mathcal{K}| \leq \lambda$. ■

Narzuca się pytanie, czy twierdzenie E.18 można rozszerzyć na *przeliczalne* rodziny podzbiorów zbioru X. Oczywiście trzeba wówczas zakładać, że zbiór X jest nieprzeliczalny, gdyż każdy zbiór przeliczalny jest sumą przeliczalnie wielu swoich podzbiorów skończonych (nawet jednoelementowych).

Kolejne twierdzenie i następujący po nim przykład rzucają światło na ten problem.

Twierdzenie E.19. Niech X będzie dowolnym nieprzeliczalnym zbiorem mocy κ oraz $\mathcal{K}$ – przeliczalną rodziną podzbiorów zbioru X, których moce są wspólnie ograniczone przez pewną nieskończoną liczbę kardynalną $\lambda < \kappa$. Wówczas $|\bigcup \mathcal{K}| < |X|$, w szczególności $\bigcup \mathcal{K} \neq X$.

Dowód. Powtarzamy argument z dowodu twierdzenia E.18: z twierdzenia E.17 wynika, że $|\bigcup \mathcal{K}| \leq \lambda$. ■

Uwaga. To twierdzenie można uogólnić, przyjmując założenie, że $\mathcal{K}$ jest rodziną mocy mniejszej od κ. Dowód pozostanie bez zmian.

Przykład E.20.

(1) Niech $X = O(\aleph_\omega)$ oraz $A_n = O(\aleph_n)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$X = \bigcup_{n<\omega} A_n,$$

a jednocześnie $|A_n| < |X|$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Istotnie, jeśli $\alpha \in O(\aleph_\omega)$, czyli $\alpha < \aleph_\omega$, to $|\alpha| < \aleph_\omega$, gdyż $\aleph_\omega$ jest liczbą początkową. Zatem albo $|\alpha| < \aleph_0$ i wtedy $\alpha \in A_0$ albo $|\alpha| = \aleph_n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ i wówczas $\alpha < \aleph_{n+1}$, czyli $\alpha \in A_{n+1}$.

(2) Niech $X = O(\aleph_{\omega+\omega})$ oraz $A_n = O(\aleph_{\omega+n})$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$X = \bigcup_{n<\omega} A_n,$$

a jednocześnie $|A_n| < |X|$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

(3) Niech $X = O(\aleph_{\omega^\omega})$ oraz $A_n = O(\aleph_{\omega^n})$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$X = \bigcup_{n<\omega} A_n,$$

a jednocześnie $|A_n| < |X|$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. ■

Może się zatem zdarzyć, że zbiór X nieprzeliczalnej mocy κ jest sumą *przeliczalnie* wielu swoich podzbiorów mocy mniejszej niż κ (przy czym moce tych zbiorów nie mogą być wspólnie ograniczone przez żadną liczbę $\lambda < \kappa$). Oczywiście zależy to jedynie od mocy zbioru X, czyli liczby kardynalnej κ. Mamy na przykład następujące twierdzenie, wzmacniające nierówność $\mathfrak{c} > \aleph_0$.

Twierdzenie E.21. Żaden zbiór mocy continuum nie jest sumą przeliczalnie wielu swoich podzbiorów mocy mniejszej niż continuum.

Dowód. Wystarczy rozważyć przypadek, gdy rozpatrywanym zbiorem mocy continuum jest zbiór $A = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ wszystkich nieskończonych ciągów rzeczywistych.

Niech $\{S_k : k \in \mathbb{N}\}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru A taką, że $|S_k| < \mathfrak{c}$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Chcemy pokazać, że $A \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n$.

Rozważając rzutowanie na k-tą oś, tzn. funkcję $p_k : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}$, określoną wzorem

$$p_k\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = x_k$$

stwierdzamy, że $|p_k[S_k]| \leq |S_k| < \mathfrak{c}$ i wybieramy $y_k \in \mathbb{R} \setminus \pi_k[S_k]$. Wtedy

$$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n,$$

a więc $A \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n \neq \varnothing$. ■

Twierdzenie to, łącznie z przykładem E.20 wyjaśnia, dlaczego *nie można* jako dodatkowego aksjomatu przyjąć na przykład żadnej z równości $\mathfrak{c} = \aleph_\omega$, $\mathfrak{c} = \aleph_{\omega+\omega}$ lub $\mathfrak{c} = \aleph_{\omega^\omega}$.

Niech κ będzie dowolną nieskończoną liczbą kardynalną. Najmniejsza liczba kardynalna λ taka, że zbiór mocy κ *jest* sumą λ swoich podzbiorów, z których każdy jest mocy mniejszej niż κ, nazywa się **współczynnikiem współkońcowości** liczby kardynalnej κ i jest oznaczana $\mathrm{cf}(\kappa)$. Jeśli $\mathrm{cf}(\kappa) = \lambda$, to mówimy też, że liczba kardynalna κ **ma współkońcowość** λ. Nazwę „współczynnik współkońcowości" wyjaśni twierdzenie E.26.

Jasne jest, że dla każdej liczby kardynalnej κ zachodzi nierówność $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \kappa$. Z twierdzenia E.18 wynika także, że $\mathrm{cf}(\kappa) \geq \aleph_0$. Oczywiście $\mathrm{cf}(\aleph_0) = \aleph_0$. Poznaliśmy też przykłady nieprzeliczalnych liczb kardynalnych o przeliczalnej współkońcowości, czyli takich liczb κ, dla których $\mathrm{cf}(\kappa) = \aleph_0$ (zob. przykład E.20). Z drugiej strony, twierdzenie E.21 pokazuje, że $\mathrm{cf}(\mathfrak{c}) > \aleph_0$.

Skoro zbiór mocy continuum nie jest sumą przeliczalnie wielu zbiorów mocy mniejszej, to powstaje naturalne pytanie, czy w ogóle może on być sumą *mniej niż continuum* zbiorów mocy mniejszej, tzn., czy $\mathrm{cf}(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}$.

Nieskończoną liczbę kardynalną κ nazywamy liczbą **regularną**, jeśli $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$; jeśli $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$, to κ jest liczbą **nieregularną**. Innymi słowy, liczba κ jest regularna, jeśli dowolna suma mniej niż κ zbiorów mocy mniejszej niż κ ma moc mniejszą niż κ.

Oczywistym przykładem liczby regularnej jest $\aleph_0$. Liczba $\aleph_1$ też jest regularna, ponieważ zbiory mocy mniejszej niż $\aleph_1$ to po prostu zbiory co najwyżej przeliczalne, a suma co najwyżej przeliczalnie wielu zbiorów co najwyżej przeliczalnych jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym. Powyższe spostrzeżenie można uogólnić na nieskończone liczby kardynalne postaci $\aleph_{\alpha+1}$. Zauważmy, że $\aleph_{\alpha+1}$ jest najmniejszą liczbą kardynalną większą od $\aleph_\alpha$. Ogólnie, jeśli κ jest dowolną liczbą kardynalną, to najmniejszą liczbą kardynalną większą od κ nazywamy **następnikiem kardynalnym** liczby κ i oznaczamy symbolem κ^+. Zatem $\aleph_{\alpha+1} = {\aleph_\alpha}^+$. Liczby postaci κ^+ nazywamy **następnikami kardynalnymi**.

Twierdzenie E.22. Każdy nieskończona liczba kardynalna będąca następnikiem kardynalnym jest liczbą regularną.

Dowód. Niech $\lambda = \kappa^+$ będzie daną nieskończoną liczbą kardynalną. Wystarczy zauważyć, że zbiory mocy mniejszej niż λ to po prostu zbiory mocy co najwyżej κ, a zgodnie z twierdzeniem E.14 suma co najwyżej κ wielu takich zbiorów ma moc co najwyżej κ, a więc mniejszą niż λ. ■

Każda liczba $\aleph_n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest więc regularna. Przykładem liczby nieregularnej jest $\aleph_\omega$, gdyż zgodnie z przykładem E.20

$$\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \aleph_0 < \aleph_\omega.$$

Nieregularna jest też liczba $\aleph_{\omega_1}$, czyli najmniejsza liczba kardynalna, poniżej której jest nieprzeliczalnie wiele nieskończonych liczb kardynalnych. Mianowicie, nietrudno pokazać, że

$$\mathrm{cf}(\aleph_{\omega_1}) = \aleph_1 < \aleph_{\omega_1}.$$

Liczby $\aleph_{\omega_1}$ oraz $\aleph_\omega$ nie są następnikami kardynalnymi – takie liczby nazywamy granicznymi liczbami kardynalnymi. Dokładniej, κ jest **graniczną liczbą kardynalną**, jeśli κ jest nieprzeliczalna oraz $\lambda^+ < \kappa$ dla każdej liczby kardynalnej $\lambda < \kappa$. Zauważmy, że $\aleph_\alpha$ jest graniczną liczbą kardynalną wtedy i tylko wtedy, gdy α jest graniczną liczbą porządkową.

Z twierdzenia E.22 wynika, że każda liczba kardynalna nieregularna jest graniczną liczbą kardynalną. Nieprzeliczalne regularne graniczne liczby kardynalne nazywamy liczbami **słabo nieosiągalnyni**. Zatem liczba kardynalna κ jest słabo nieosiągalna, jeśli $\kappa > \aleph_0$, $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$ oraz $\lambda < \kappa \Rightarrow \lambda^+ < \kappa$. Jeśli dodatkowo

$\lambda < \kappa \Rightarrow 2^\lambda < \kappa$, to liczba κ jest **mocno nieosiągalna** (lub krótko: nieosiągalna). Aksjomaty teorii mnogości *nie rozstrzygają* kwestii istnienia liczb słabo bądź mocno nieosiągalnych.

Wróćmy do pytania, czy continuum jest liczbą regularną. Znowu okazuje się, że aksjomaty teorii mnogości nie dają na nie odpowiedzi. Przypomnijmy, że hipotezę continuum można równoważnie sformułować jako równość $\mathfrak{c} = \aleph_1$. Jeśli więc przyjmiemy tę równość jako dodatkowy aksjomat, to liczba $\mathfrak{c}$ jest regularna. Ale z drugiej strony, dodatkowym aksjomatem może też być równość $\mathfrak{c} = \aleph_{\omega_1}$, z której wynika, że $\mathfrak{c}$ jest liczbą nieregularną. Ogólnie, Cohen udowodnił, że nierówność $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) > \aleph_0$ jest *jedynym* ograniczeniem, narzuconym (zob. twierdzenie E.21) przez aksjomaty ZFC na wartość liczby kardynalnej $\mathfrak{c} = \aleph_\alpha$ na skali alefów.

Ponieważ $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, więc z twierdzenia E.21 wynika nierówność $\mathrm{cf}(2^{\aleph_0}) > \aleph_0$. Ma ona następujące uogólnienie, wzmacniające twierdzenie Cantora, zgodnie z którym $2^\kappa > \kappa$.

Twierdzenie E.23. Dla dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej κ

$$\mathrm{cf}(2^\kappa) > \kappa.$$

Dowód. Chcemy udowodnić, że zbiór mocy 2^κ nie jest sumą κ swoich podzbiorów, z których każdy jest mocy mniejszej niż 2^κ. Wystarczy rozważyć przypadek, gdy rozpatrywanym zbiorem mocy 2^κ jest zbiór $A = \mathcal{P}(\kappa)^{O(\kappa)}$ wszystkich funkcji z $O(\kappa)$ w $\mathcal{P}(\kappa)$. Istotnie, $|A| = 2^\kappa$, gdyż

$$|\mathcal{P}(\kappa)^{O(\kappa)}| = (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa\cdot\kappa} = 2^\kappa,$$

co wynika z twierdzeń E.11 i E.13.

Dalej rozumujemy tak, jak w dowodzie twierdzenia E.21. Niech więc $\{S_\alpha : \alpha < \kappa\}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru A taką, że $|S_\alpha| < 2^\kappa$ dla każdego $\alpha < \kappa$. Chcemy pokazać, że $A \neq \bigcup_{\alpha<\kappa} S_\alpha$.

Rozważając rzutowanie na α-tą oś, tzn. funkcję $p_\alpha : \mathcal{P}(\kappa)^{O(\kappa)} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{P}(\kappa)$, określoną wzorem

$$p_\alpha\Big((X_\beta : \ \beta < \kappa)\Big) = X_\alpha,$$

stwierdzamy, że $|p_\alpha[S_\alpha]| \leq |S_\alpha| < 2^\kappa$ i wybieramy $Y_\alpha \in \mathcal{P}(\kappa) \setminus p_\alpha[S_\alpha]$. Wtedy

$$(Y_\alpha : \alpha < \kappa) \notin \bigcup_{\alpha<\kappa} S_\alpha,$$

a więc $A \setminus \bigcup_{\alpha<\kappa} S_\alpha \neq \emptyset$. ■

W. Easton udowodnił, że nierówność $\mathrm{cf}(2^\kappa) > \kappa$ jest jednym z dwóch tylko ograniczeń, narzuconych przez aksjomaty ZFC na wartości potęg 2^κ *regularnych* liczb κ. Drugim jest oczywisty fakt, że $\kappa < \lambda \Rightarrow 2^\kappa \leq 2^\lambda$. Zauważmy więc, że aksjomaty nie rozstrzygają w szczególności czy z tego, że $|A| < |B|$ wynika, że $|\mathcal{P}(A)| < |\mathcal{P}(B)|$. Na przykład, bez sprzeczności można przyjąć jako dodatkowy aksjomat, że zbiór mocy $\aleph_1$ ma continuum podzbiorów, tzn. $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$.

Jeśli chodzi o wartości potęg 2^κ *nieregularnych* liczb κ, to sytuacja jest znacznie bardziej skomplikowana. Na przykład J. Silver udowodnił, że *jeśli κ jest nieregularną liczbą kardynalną o nieprzeliczalnej współkońcowości, to z tego, że dla każdej nieskończonej liczby kardynalnej $\lambda < \kappa$ zachodzi $2^\lambda = \lambda^+$ wynika, że $2^\kappa = \kappa^+$.*

Twierdzenie Silvera wiąże się z tzw. **uogólnioną hipotezą continuum** (w skrócie GCH od angielskiej nazwy *Generalized Continuum Hypothesis*). Jest to zdanie stwierdzające, że

$$2^\kappa = \kappa^+$$

dla *każdej* nieskończonej liczby kardynalnej κ. W szczególności z GCH wynika CH: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, ale również $2^{\aleph_1} = \aleph_2$ itd. K. Godel udowodnił, że *uogólniona hipoteza continuum jest niesprzeczna z teorią mnogości ZFC.*

Powyższy przegląd wyników pokazuje, że w przeciwieństwie do dodawania i mnożenia, potęgowanie liczb kardynalnych jest działaniem bardzo skomplikowanym. W ogólności o wartościach potęg κ^λ udowodniono wiele twierdzeń, spośród których pokażemy tu tylko kilka najprostszych.

Pierwsze z nich uogólnia udowodnione wcześniej równości $2^{\aleph_0} = {\aleph_0}^{\aleph_0}$ i $2^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$.

Twierdzenie E.24. Jeśli κ i λ są liczbami kardynalnymi takimi, że liczba λ jest nieskończona oraz $2 \leq \kappa \leq \lambda$, to $\kappa^\lambda = 2^\lambda$. W szczególności, $\kappa^\kappa = 2^\kappa$ dla dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej κ.

Dowód. Mamy następujące oszacowania

$$2^{\lambda} \leq \kappa^{\lambda} \leq (2^{\kappa})^{\lambda} = 2^{\kappa \cdot \lambda} = 2^{\lambda},$$

których szczegółowe uzasadnienie pozostawiamy Czytelnikowi. ■

Pokazaliśmy więc, że jeśli κ i λ są liczbami kardynalnymi takimi, że $2 \leq \kappa \leq \lambda$, to liczba κ^{λ} jest mocą zbioru wszystkich podzbiorów dowolnego zbioru mocy λ. Warto w tym miejscu odnotować, że jeśli $\kappa > \lambda$, to liczba κ^{λ} jest z kolei mocą pewnej naturalnej rodziny podzbiorów dowolnego zbioru mocy κ.

Mianowicie, dla zbioru A i liczby kardynalnej λ niech

$$[A]^{\lambda} = \{X \subseteq A : \ |X| = \lambda\}.$$

Twierdzenie E.25. Jeśli κ jest nieskończoną liczbą kardynalną, A jest dowolnym zbiorem mocy κ, a λ jest liczbą kardynalna taką, że $\lambda \leq \kappa$, to

$$\kappa^{\lambda} = |[A]^{\lambda}|.$$

Dowód. Na początek zauważmy, że jeśli A i B są zbiorami takimi, że $A \sim B$, to $[A]^{\lambda} \sim [B]^{\lambda}$.

Dla dowodu nierówności „$\leq$" wystarczy zauważyć, że dla dowolnych zbiorów C i D mamy

$$D^C \subseteq [C \times D]^{|C|}.$$

Zatem jeśli $|C| = \lambda$ i $|D| = \kappa$, to

$$\kappa^{\lambda} = |D^C| \leq |[C \times D]^{\lambda}| = |[A]^{\lambda}|,$$

gdyż $|C \times D| = \lambda \cdot \kappa = \kappa = |A|$ na mocy twierdzenia E.15.

Żeby udowodnić nierówność „$\geq$", dla każdego zbioru $X \in [A]^{\lambda}$ wybierzmy funkcję $f_X : O(\lambda) \xrightarrow{\text{na}} X$. Wówczas odwzorowanie

$$F : [A]^{\lambda} \longrightarrow A^{O(\lambda)},$$

dane wzorem $F(X) = f_X$, jest różnowartościowe. Stąd

$$|[A]^\lambda| \leq |A^{O(\lambda)}| = |A|^{|O(\lambda)|} = \kappa^\lambda. \quad \blacksquare$$

Niech κ będzie nieskończoną liczbą kardynalną. Powiemy, że zbiór $X \subseteq O(\kappa)$ jest **ograniczony** (w κ), jeśli istnieje liczba porządkowa $\alpha < \kappa$, taka że $X \subseteq O(\alpha)$ (α jest wówczas ograniczeniem górnym zbioru X w zbiorze $O(\kappa)$, liniowo uporządkowanym przez relację porównywania liczb porządkowych). W przeciwnym razie, zbiór X jest **nieograniczony** lub **współkońcowy** (w κ). Zauważmy, że zbiór $X \subseteq O(\kappa)$ jest nieograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy $\kappa = \bigcup_{\beta \in X} O(\beta)$.

Mamy następującą użyteczną charakteryzację współczynnika współkońcowości liczby κ, stanowiącą zarazem wyjaśnienie jego nazwy.

Twierdzenie E.26. Jeśli κ jest nieskończoną liczbą kardynalną, to liczba kardynalna $\mathrm{cf}(\kappa)$ jest równa najmniejszej mocy zbioru współkońcowego w κ. Dokładniej:

(1) jeśli $X \subseteq O(\kappa)$ i $|X| < \mathrm{cf}(\kappa)$, to zbiór X jest ograniczony w κ,

(2) istnieje zbiór $X \subseteq O(\kappa)$ nieograniczony w κ taki, że $|X| = \mathrm{cf}(\kappa)$.

Dowód. Żeby pokazać punkt (1), wystarczy zauważyć, że jeśli zbiór X jest nieograniczony, to $\kappa = \bigcup_{\beta \in X} O(\beta)$, gdzie $|O(\beta)| < \kappa$ dla każdego $\beta \in X$. Stąd $|X| \geq \mathrm{cf}(\kappa)$.

Dla dowodu punktu (2) rozważmy dwa przypadki.

Przypadek 1. $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$. Wtedy wystarczy wziąć $X = \kappa$.

Przypadek 2. $\mathrm{cf}(\kappa) = \lambda < \kappa$. Znajdźmy rodzinę $\{A_\beta : \beta < \lambda\}$ zbiorów mocy mniejszej od κ, której suma ma moc κ. Niech $X = \{|A_\beta| : \beta < \lambda\}$. Wtedy $|X| \leq \lambda$ i $X \subseteq O(\kappa)$. Twierdzimy, że zbiór X jest nieograniczony. Istotnie, gdyby $X \subseteq O(\alpha)$ dla pewnej liczby $\alpha < \kappa$, to dla każdego $\beta < \lambda$ byłoby $|A_\beta| \leq |\alpha|$. Wówczas jednak z twierdzenia E.17 wynikałoby, że

$$|\bigcup_{\beta < \lambda} A_\beta| \leq \max(|\alpha|, \lambda) < \kappa$$

i otrzymalibyśmy sprzeczność.

Zatem X jest zbiorem niegraniczonym w κ oraz $|X| \leq \mathrm{cf}(\kappa)$. Z punktu (1) wynika, że $|X| = \mathrm{cf}(\kappa)$. ■

Kolejne twierdzenie podaje wzór rekurencyjny na potęgę $(\kappa^+)^\lambda$, zwany **wzorem Hausdorffa**.

Twierdzenie E.27.(Wzór Hausdorffa) Dla dowolnych nieskończonych liczb kardynalnych κ i λ

$$(\kappa^+)^\lambda = \kappa^+ \cdot \kappa^\lambda = \max(\kappa^+, \kappa^\lambda).$$

Dowód. Równość $\kappa^+ \cdot \kappa^\lambda = \max(\kappa^+, \kappa^\lambda)$ wynika z Twierdzenia E.15.

Nierówność

$$(\kappa^+)^\lambda \geq \max(\kappa^+, \kappa^\lambda)$$

jest oczywista.

Dla dowodu nierówności

$$(\kappa^+)^\lambda \leq \max(\kappa^+, \kappa^\lambda)$$

rozważmy dwa przypadki.

Przypadek 1. $\kappa^+ \leq \lambda$.

Wówczas $\kappa^+ < 2^\lambda$ oraz na mocy twierdzenia E.24

$$(\kappa^+)^\lambda = 2^\lambda = \kappa^\lambda,$$

co natychmiast implikuje, że

$$(\kappa^+)^\lambda = \max(\kappa^+, \kappa^\lambda).$$

Przypadek 2. $\lambda < \kappa^+$.

Na mocy twierdzenia E.25 wystarczy pokazać, że

$$|[O(\kappa^+)]^\lambda| \leq \max(\kappa^+, \kappa^\lambda).$$

Zauważmy, że z twierdzenia E.22 wynika, że $\mathrm{cf}(\kappa^+) = \kappa^+$. Ponadto założyliśmy, że $\lambda < \kappa^+$. Zatem na mocy twierdzenia E.26 dowolny zbiór $X \subseteq O(\kappa^+)$ mocy λ jest ograniczony w κ^+. Oznacza to, że

$$[O(\kappa^+)]^\lambda = \bigcup_{\lambda<\alpha<\kappa^+} [O(\alpha)]^\lambda.$$

Ponieważ $|O(\alpha)| < \kappa^+$, czyli $|O(\alpha)| \leq \kappa$ dla każdego $\alpha < \kappa^+$, więc z twierdzenia E.25 wynika, że

$$|[O(\alpha)]^\lambda| = |O(\alpha)|^\lambda \leq \kappa^\lambda.$$

Przedstawiliśmy więc zbiór $[O(\kappa^+)]^\lambda$ jako sumę rodziny

$$\mathcal{K} = \{[O(\alpha)]^\lambda : \lambda < \alpha < \kappa^+\}$$

zbiorów mocy co najwyżej κ^λ. Z twierdzenia E.17 wynika więc, że

$$|[O(\kappa^+)]^\lambda| \leq \max(\kappa^+, \kappa^\lambda). \quad \blacksquare$$

Wniosek E.28. Dla każdej liczby naturalnej n i dowolnej liczby porządkowej α

$$\aleph_n^{\aleph_\alpha} = \max(\aleph_n, 2^{\aleph_\alpha}).$$

Dowód. Udowodnimy przez indukcję, że każda liczba naturalna n ma następującą własność $W(n)$: dla dowolnej liczby porządkowej α

$$\aleph_n^{\aleph_\alpha} = \max(\aleph_n, 2^{\aleph_\alpha}).$$

Po pierwsze, z twierdzenia E.24 wynika, że

$$\aleph_0^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha},$$

co oznacza, że dowodzona własność jest prawdziwa dla $n = 0$.

Weźmy teraz liczbę $n \in \mathbb{N}$ i załóżmy $W(n)$. Sprawdzamy $W(n+1)$. Dla dowolnej liczby $m \in \mathbb{N}$, stosując wzór Hausdorffa, otrzymujemy

$$\aleph_{n+1}^{\aleph_\alpha} = \max(\aleph_{n+1}, \aleph_n^{\aleph_\alpha}) = \max(\aleph_{n+1}, \aleph_n, 2^{\aleph_\alpha}) = \max(\aleph_{n+1}, 2^{\aleph_\alpha}),$$

co kończy dowód. ■

Ustalmy teraz nieskończoną liczbę kardynalną κ i przyjrzyjmy się, jak zmienia się potęga κ^λ w zależności od liczby kardynalnej λ. Oczywiście, $\kappa^0 = 1$, gdyż jedyną funkcją o pustej dziedzinie jest zbiór pusty. Jeśli $\lambda > 0$, to $\kappa \leq \kappa^\lambda \leq \max(2^\kappa, 2^\lambda)$. W szczególności, z twierdzenia Hessenberga wynika (por. twierdzenie E.14), że $\kappa^\lambda = \kappa$ dla każdej skończonej liczby $\lambda > 0$. Może być też tak, że $\kappa^\lambda = \kappa$ dla nieskończonej liczby λ; na przykład $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$. Niemniej jednak $\kappa^\lambda > \kappa$, o ile liczba λ jest *dostatecznie duża*: twierdzenie Cantora pokazuje, że wystarczy, by $\lambda \geq \kappa$, gdyż wówczas $\kappa^\lambda \geq \kappa^\kappa = 2^\kappa > \kappa$. Kolejne twierdzenie wzmacnia powyższe spostrzeżenie: wystarczy, że $\lambda \geq \mathrm{cf}(\kappa)$, by $\kappa^\lambda > \kappa$.

Twierdzenie E.29. Dla dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej κ

$$\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} > \kappa.$$

Dowód. Niech $\lambda = \mathrm{cf}(\kappa)$. Ponieważ

$$\kappa^\lambda = |O(\kappa)^{O(\lambda)}|,$$

więc wystarczy pokazać, że dla dowolnego zbioru $F \subseteq O(\kappa)^{O(\lambda)}$ mocy κ istnieje funkcja $g : O(\lambda) \to O(\kappa)$ taka, że $g \notin F$.

Skoro $\lambda = \mathrm{cf}(\kappa)$, to niech $\{F_\alpha : \alpha < \lambda\}$ będzie rodziną mocy λ podzbiorów zbioru F, taką że $F = \bigcup_{\alpha<\lambda} F_\alpha$ oraz $|F_\alpha| < \kappa$ dla każdej liczby $\alpha < \lambda$.

Do zdefiniowania szukanej funkcji g zastosujemy metodę przekątniową: wartość funkcji g w punkcie $\alpha < \lambda$ określimy tak, by była ona różna od wartości w tym punkcie dowolnej funkcji ze zbioru F_α. Mianowicie, niech $g(\alpha)$ będzie najmniejszą liczbą porządkową w zbiorze

$$O(\kappa) \setminus \{f(\alpha) : f \in F_\alpha\}.$$

Taka liczba istnieje, gdyż skoro

$$|\{f(\alpha) : f \in F_\alpha\}| \leq |F_\alpha| < \kappa,$$

to zbiór, z którego ją wybieramy, jest niepusty.

Jeśli teraz f jest dowolną funkcją należącą do zbioru F, to $f \in F_\alpha$ dla pewnej liczby porządkowej $\alpha < \lambda$. Ale wtedy $g(\alpha) \neq f(\alpha)$, a stąd $g \neq f$. ■

Okazuje się, że powyższego wyniku w ramach przyjętej aksjomatyki teorii mnogości nie da się już wzmocnić. Dokładniej, jeśli jako dodatkowy aksjomat przyjmiemy uogólnioną hipotezę continuum, to wówczas potęgowanie liczb kardynalnych jest proste i w szczególności, $\kappa^\lambda = \kappa$ dla każdej niezerowej liczby kardynalnej $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$, natomiast $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^+$.

Twierdzenie E.30. Załóżmy GCH. Wówczas dla dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej κ oraz dowolnej liczby kardynalnej $\lambda > 0$

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} \kappa & \text{jeśli} \quad \lambda < \mathrm{cf}(\kappa) \\ \kappa^+ & \text{jeśli} \quad \mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda < \kappa \\ \lambda^+ & \text{jeśli} \quad \kappa \leq \lambda \end{cases}$$

Dowód. Po pierwsze zauważmy, że jeśli $\aleph_0 \leq \kappa \leq \lambda$, to z twierdzenia E.24 oraz GCH wynika, że

$$\kappa^\lambda = 2^\lambda = \lambda^+.$$

Załóżmy teraz, że $0 < \lambda < \kappa$ i rozważmy dwa przypadki.

Przypadek 1. $0 < \lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$.

Z twierdzenia E.25 wynika, że

$$\kappa^\lambda = |[O(\kappa)]^\lambda|,$$

a na mocy twierdzenia E.26 dowolny zbiór $X \subseteq O(\kappa)$ mocy λ jest ograniczony w κ, czyli

$$[O(\kappa)]^\lambda = \bigcup_{\lambda < \alpha < \kappa} [O(\alpha)]^\lambda.$$

Ale jeśli $\lambda < \alpha < \kappa$, to przyjmując, że $\mu = \max(|O(\alpha)|, \lambda) < \kappa$, z pomocą twierdzenia E.25, twierdzenia E.24 i GCH wnioskujemy, że:

$$|[O(\alpha)]^\lambda| \leq \mu^\mu = 2^\mu = \mu^+ \leq \kappa.$$

Z twierdzenia E.17 wynika teraz, że $[O(\kappa)]^\lambda \leq \kappa$, co daje $\kappa^\lambda \leq \kappa$ i ostatecznie $\kappa^\lambda = \kappa$, gdyż $\lambda > 0$.

Przypadek 2. $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda < \kappa$.

Na mocy twierdzenia E.24 oraz GCH mamy $\kappa^\lambda \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa = \kappa^+$. Z drugiej strony, z twierdzenia E.29 wynika, że $\kappa^\lambda \geq \kappa^+$. Ostatecznie, $\kappa^\lambda = \kappa^+$, co kończy dowód. ■