Formy kwadratowe

Mirosław Sobolewski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

14. wykład z algebry liniowej
Warszawa, styczeń 2017

Definicja

Funkcja $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *jest* ***formą kwadratową*** *, jeśli*
$Q((x_1, \dots, x_n)) = Q((x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{\{1 \le i < j \le n\}} a_{ij} x_i x_j$*, tzn.* Q *przedstawia się przy pomocy wielomianu jednorodnego stopnia 2 od zmiennych* $x_1, \dots, x_n$ *(czyli wszystkie jednomiany będące jego składnikami są stopnia 2).*

Przykład

$Q : \mathbb{R}^2 :\to \mathbb{R}$ zdefiniowana przez $Q((x_1, x_2)) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ jest formą kwadratową natomiast $P, S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, zdefiniowane przez
$P((x_1, x_2)) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_1$,
$S((x_1, x_2)) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 3$ nie sa formami kwadratowymi.

Definicja

$n \times n$ macierz kwadratową $A = [a_{ij}]$ nazywamy macierzą symetryczną jeśli dla każdej pary indeksów $1 \leq i, j \leq n$ zachodzi $a_{ij} = a_{ji}$. Inaczej mówiąc spełniona jest równość $A^\top = A$.

Przykład

Macierz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ jest symetryczna, natomiast macierz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ nie jest symetryczna.

Definicja

Niech Q będzie formą kwadratową na $\mathbb{R}^n$ i niech $Q = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j$. Macierzą formy Q (w bazie standardowej) nazwiemy $n \times n$ macierz symetryczną $M = [b_{ij}]$, w której $b_{ii} = a_{ii}$ dla $i = 1, \dots n$ oraz $b_{ij} = b_{ji} = \frac{1}{2}a_{ij}$ dla $1 \leq i < j \leq n$.

Definicja

Niech Q będzie formą kwadratową na $\mathbb{R}^n$ i niech $Q = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j$. Macierzą formy Q (w bazie standardowej) nazwiemy $n \times n$ macierz symetryczną $M = [b_{ij}]$, w której $b_{ii} = a_{ii}$ dla $i = 1, \ldots n$ oraz $b_{ij} = b_{ji} = \frac{1}{2}a_{ij}$ dla $1 \le i < j \le n$.

Przykład

Macierzą $Q((x_1, x_2)) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ jest macierz $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Definicja

Niech Q będzie formą kwadratową na $\mathbb{R}^n$ i niech $Q = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j$. Macierzą formy Q (w bazie standardowej) nazwiemy $n \times n$ macierz symetryczną $M = [b_{ij}]$, w której $b_{ii} = a_{ii}$ dla $i = 1, \ldots n$ oraz $b_{ij} = b_{ji} = \frac{1}{2}a_{ij}$ dla $1 \le i < j \le n$.

Przykład

Macierzą $Q((x_1, x_2)) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ jest macierz $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Twierdzenie

Jeśli M jest macierzą formy kwadratowej Q na $\mathbb{R}^n$ to oznaczając $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ mamy $Q((x_1, \ldots, x_n)) = X^\top MX$.

Definicja

Niech $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *będzie formą kwadratową. Powiemy, że forma* Q *jest dodatnio określona, jeśli* $Q(v) > 0$ *dla każdego niezerowego wektora* $v \in \mathbb{R}^n$*. Powiemy, że forma* Q *jest ujemnie określona, jeśli* $Q(v) < 0$ *dla każdego niezerowego wektora* $v \in \mathbb{R}^n$*.*

Przykład

(a) W $\mathbb{R}^n$ forma kwadratowa zdefiniowana $Q(v) = ||v||^2 = v \circ v$ jest dodatnio określona, zaś forma Q' zdefiniowana $Q'(v) = -Q(v)$ jest ujemnie określona.
(b) Forma Q na $\mathbb{R}^2$ określona $Q((x_1, x_2)) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ jest dodatnio określona, gdyż $Q((x_1, x_2)) = 3x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 > 0$ dla $x_1 \neq 0$ lub $x_2 \neq 0$.

Twierdzenie (Kryterium Sylvestera)

Niech $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *będzie formą kwadratową zaś* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *jej macierzą. Niech* W_i *dla* $i = 1, \ldots, n$ *oznacza wyznacznik macierzy* $i \times i$ *powstałej z* A *przez wykreślenie ostatnich* $n - i$ *wierszy i kolumn.*
Wtedy:
Forma Q *jest dodatnio określona* $\Leftrightarrow W_i > 0$ *dla* $i = 1, \ldots, n$.

Twierdzenie (Kryterium Sylvestera)

Niech $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *będzie formą kwadratową zaś* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *jej macierzą. Niech* W_i *dla* $i = 1, \dots, n$ *oznacza wyznacznik macierzy* $i \times i$ *powstałej z* A *przez wykreślenie ostatnich* $n - i$ *wierszy i kolumn.*
Wtedy:
Forma Q *jest dodatnio określona* $\Leftrightarrow W_i > 0$ *dla* $i = 1, \dots, n$.

Uwaga Ponieważ forma Q jest ujemnie określona $\Leftrightarrow -Q$ jest dodatnio określona, kryterium to pozwala rozstrzygać również ujemną określoność formy. Stąd:

Twierdzenie (Kryterium Sylvestera)

Niech $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową zaś $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jej macierzą. Niech W_i dla $i = 1, \ldots, n$ oznacza wyznacznik macierzy $i \times i$ powstałej z A przez wykreślenie ostatnich $n - i$ wierszy i kolumn. Wtedy:
Forma Q jest dodatnio określona $\Leftrightarrow W_i > 0$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Uwaga Ponieważ forma Q jest ujemnie określona $\Leftrightarrow -Q$ jest dodatnio określona, kryterium to pozwala rozstrzygać również ujemną określoność formy. Stąd:

Twierdzenie (2)

Niech Q będzie formą kwadratową na $\mathbb{R}^n$ zaś $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jej macierzą. Niech W_i dla $i = 1, \ldots, n$ oznacza wyznacznik macierzy $i \times i$ powstałej z A przez wykreślenie ostatnich $n - i$ wierszy i kolumn. Wtedy:
Forma Q jest ujemnie określona $\Leftrightarrow W_i < 0$ dla i nieparzystych oraz $W_i > 0$ dla parzystych i, gdzie $i = 1, \ldots, n$.

Przykład

a) Niech $Q((x_1, x_2)) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ forma kwadratowa na $\mathbb{R}^2$. Jej macierzą jest $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, zatem $W_1 = 4 > 0$, $W_2 = \det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 3 > 0$, czyli Q jest dodatnio określona, na mocy kryterium Sylvestera.

Przykład

a) Niech $Q((x_1, x_2)) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ forma kwadratowa na $\mathbb{R}^2$. Jej macierzą jest $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, zatem $W_1 = 4 > 0$,
$W_2 = \det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 3 > 0$, czyli Q jest dodatnio określona, na mocy kryterium Sylvestera.

b) Niech $Q((x_1, x_2, x_3)) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 2x_2x_3 - 2x_3^2$ będzie formą kwadratową określoną na $\mathbb{R}^3$. Jej macierzą jest
$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. Mamy $W_1 = -1 < 0$,
$W_2 = \det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 1 > 0$,
$W_3 = \det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = -4 + 1 + 2 = -1 < 0$ zatem Q jest ujemnie określona (tw. 2)

Przykład

c) Niech $Q((x_1, x_2)) = -x_1^2 + 6x_1x_2 - x_2^2$ będzie formą kwadratową na $\mathbb{R}^2$. Jej macierzą jest $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Mamy: $W_1 = -1 < 0$, $W_2 = \det \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = 1 - 9 = -8 < 0$. Zatem Q nie jest ani dodatnio określona, ani ujemnie określona. Rzeczywiście $Q((1, 0)) = -1 < 0$, zaś $Q((1, 1)) = 4 > 0$.

Przykład

c) Niech $Q((x_1, x_2)) = -x_1^2 + 6x_1x_2 - x_2^2$ będzie formą kwadratową na $\mathbb{R}^2$. Jej macierzą jest $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Mamy: $W_1 = -1 < 0$, $W_2 = \det \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = 1 - 9 = -8 < 0$. Zatem Q nie jest ani dodatnio określona, ani ujemnie określona. Rzeczywiście $Q((1,0)) = -1 < 0$, zaś $Q((1,1)) = 4 > 0$.

Definicja

Formę kwadratową Q na przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ nazywamy dodatnio półokreśloną (ujemnie półokreśloną) jeśli dla wszystkich wektorów $v \in \mathbb{R}^n$ zachodzi $Q(v) \geq 0$ ($Q(v) \leq 0$).

Uwaga: Tak zdefiniowane formy dodatnio (ujemnie) półokreślone obejmują jako szczególny przypadek formy dodatnio (ujemnie) określone

Przykład

Forma kwadratowa $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem $Q((x_1, x_2)) = x_1^2$ jest dodatnio półokreślona, ale nie jest dodatnio określona

Do badania dodatniej i ujemnej półokreśloności form kwadratowych można użyć następującego twierdzenia.

Twierdzenie

Niech Q będzie formą kwadratową, która ma macierz M. Wówczas Q jest dodatnio (ujemnie) półokreślona $\Leftrightarrow$ wszystkie pierwiastki wielomianu charakterystycznego w_M są nieujemne (niedodatnie). Ponadto, jeśli są one dodatnie (ujemne) to również Q jest dodatnio (ujemnie) określona.

Przykład

Niech Q będzie formą kwadratową na $\mathbb{R}^3$ opisaną wzorem $Q(x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_3^2$. Macierzą Q w bazie standardowej jest $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Wielomianem charakterystycznym tej macierzy jest $w(\lambda) =$

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1)(2-\lambda) = -\lambda(\lambda-2)^2.$$

Pierwiastkami w są 0 i 2 (podwójny). Stąd, na mocy powyższego twierdzenia wnosimy, że Q jest dodatnio półokreślona, ale nie jest dodatnio określona. Istotnie $Q((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2)^2 + 2x_3^2 \geq 0$ oraz $Q((1, -1, 0)) = 0$.

Przykład

Niech Q będzie formą kwadratową na $\mathbb{R}^3$ opisaną wzorem $Q(x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_3^2$. Macierzą Q w bazie standardowej jest $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Wielomianem charakterystycznym tej macierzy jest $w(\lambda) =$

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1)(2-\lambda) = -\lambda(\lambda-2)^2.$$

Pierwiastkami w są 0 i 2 (podwójny). Stąd, na mocy powyższego twierdzenia wnosimy, że Q jest dodatnio półokreślona, ale nie jest dodatnio określona. Istotnie $Q((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2)^2 + 2x_3^2 \geq 0$ oraz $Q((1, -1, 0)) = 0$.

Ostrzeżenie Macierzą formy $Q((x_1, x_2)) = -x_2^2$ jest $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Mamy $W_1 = W_2 = 0 \geq 0$. Jednak oczywiście stąd nie można wnosić, że Q jest dodatnio półokreślona, gdyż $Q((0, 1)) = -1$.