Przykłady i kontrprzykłady
z
analizy matematycznej

Marian Gewert Zbigniew Skoczylas

Przykłady i kontrprzykłady z analizy matematycznej

Oficyna Wydawnicza GiS
Wrocław 2021

Marian Gewert
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
marian.gewert@pwr.edu.pl

Zbigniew Skoczylas
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
zbigniew.skoczylas@pwr.edu.pl

Projekt okładki:
IMPRESJA Studio Grafiki Reklamowej

Skład wykonano w systemie LaTeX.

ISBN 978–83–62780–66–2

Wydanie I, Wrocław 2021
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., www.gis.wroc.pl
Druk i oprawa: Drukarnia I-BIS Bierońscy Sp. kom.

Spis treści

Wstęp

Jest to pierwsze wydawnictwo w języku polskim poświęcone przykładom i kontrprzykładom z klasycznej analizy matematycznej. W książce umieszczono przykłady zbiorów, ciągów, szeregów, funkcji, całek, itp., które mają niezwykłe własności. Oprócz tego prezentujemy kontrprzykłady świadczące, że próby osłabienia założeń standardowych twierdzeń analizy, wzmocnienia ich tez, odwrócenia albo ich uogólnień, prowadzą do fałszywych hipotez. Tego typu przykłady i kontrprzykłady omawiane są zwykle na wykładach z matematyki na początkowych latach studiów. Obecnie są one ważnym elementem kształcenia matematyków. Do książki dołączyliśmy kontrprzykłady związane z nauczaniem analizy matematycznej. Pojawiły się one ze względu na błędy, które studenci często popełniają na egzaminach.

Książka „Przykłady i kontrprzykłady z analizy matematycznej" jest przeznaczona dla studentów politechnik oraz uniwersytetów, którzy chcą rozszerzyć swoją wiedzę z analizy. Będzie ona przydatna także osobom przygotowującym się do egzaminu magisterskiego oraz uczestnikom studenckich konkursów matematycznych. Sądzimy, że tematyka przedstawiona w książce zainteresuje również pracowników naukowych. Znajdą oni tu wiele zagadnień, którymi mogą uatrakcyjnić swoje wykłady i ćwiczenia.

W roku 1964 ukazała się książka B. Gelbauma i J. Olmsteda pt. „Conterexamples in Analysis". Było to pierwsze na świecie wydawnictwo poświęcone kontrprzykładom w analizie matematycznej. Książka ta zyskała dużą popularność wśród matematyków. W 1990 r. wydano rozszerzoną wersję tej publikacji pt. „Theorems and Counterexamples in Mathematics". W ostatnim okresie ukazały się kolejne książki o podobnej tematyce: J. Appell, „Analysis in Beispielen und Gegenbeispielen. Eine Einführung in die Theorie Reeller Funktionen", A. Bourchtein, L. Bourchtein, „Counterexamples. From Elementary

Calculus to the Beginnings of Analysis”, A. Bourchtein, L. Bourchtein, „Counterexamples on Uniform Convergence: Sequences, Series, Functions, and Integrals”, A. Kharazishvili, „Strange Functions in Real Analysis”, S. Klymchuk oraz J. Mason „Using Counter-Examples in Calculus”, A. Rajwade, A. Bhandari, „Surprises and Counterexamples in Real Function Theory”. Odnotujmy jeszcze monografię M. Jarnickigo, P. Pfluga, „Continuous Nowhere Differentiable Functions. The Monsters of Analysis”, która jest poświęcona nieróżniczkowalnym funkcjom ciągłym. Ponadto ukazało się parę książek wprowadzających w podobną tematykę: S. Klymchuk „Counterexamples in Calculus”, S. Klymchuk i S. Staples „Paradoxes and Sophisms in Calculus” oraz w języku rosyjskim W. Boss, „Wykłady z matematyki. Kontrprzykłady i paradoksy”. Pojawiły się także książki o kontrprzykładach z innych działów matematyki: funkcji zespolonych, równań różniczkowych, teorii miary, teorii grafów, topologii, a także z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. W grudniu 2021 r. w wydawnictwie Elsevier ukaże się pierwszy numer czasopisma „Examples and Counterexamples”. W Internecie można znaleźć strony poświęcone kontrprzykładom np. www.mathcounterexamples.net

Niniejsza publikacja jest podzielona na tradycyjne działy analizy matematycznej: zbiory i funkcje, ciągi liczbowe, granice i ciągłość funkcji, pochodne funkcji (monotoniczność, ekstrema i wypukłość), całki (nieoznaczone, oznaczone i niewłaściwe), szeregi liczbowe, ciągi i szeregi funkcyjne, funkcje wielu zmiennych (ciągłość, pochodne cząstkowe i kierunkowe oraz ich zastosowania, całki wielokrotne). Książka zawiera niemal wszystkie klasyczne przykłady i kontrprzykłady z analizy. Oprócz tego umieściliśmy w niej kilkadziesiąt przygotowanych przez nas przykładów oraz kontrprzykładów. Łącznie w książce jest ponad 300 przykładów i kontrprzykładów. Na końcu wymieniamy literaturę, z której korzystaliśmy, a także inne publikacje o podobnej tematyce. Ponadto książka zawiera indeks, w którym szybko można znaleźć potrzebny przykład lub kontrprzykład, Opracowanie różni się od znanych książek układem materiału i zawiera zagadnienia, które są dostępne studentom pierwszego roku. Inną cechą wyróżniającą książkę jest duża liczba rysunków i wykresów funkcji.

Na zakończenie kilka słów o sposobie prezentacji przykładów i kontrprzykładów. Przedstawiamy je według następującego schematu. Najpierw wymieniamy własności, które ma rozważany zbiór, ciąg, funkcja itp. Następnie opisujemy konstrukcję zbioru lub podajemy wzór określający ciąg, szereg, funkcję.

Do tego często dołączamy rysunek lub wykres*. W kolejnym punkcie podajemy uzasadnienie, że zbiór lub funkcja mają zapowiedziane własności. Gdy przykład lub kontrprzykład są proste, to zwykle opuszczamy uzasadnienie. Często uzasadnieniem jest zamieszony wykres ilustrujący, że podana funkcja spełnia wymienione w przykładzie warunki. Gdy zaś uzasadnienie jest długie i skomplikowane, to Czytelnika odsyłamy do źródła. W kolejnym akapicie wyjaśniamy dlaczego ten przykład umieściliśmy w książce. Będzie to obiekt o nieoczekiwanych własnościach albo kontrprzykład świadczący, że próby wzmocnienia tezy jakiegoś twierdzenia, osłabienia założeń czy też jego odwrócenia, prowadzą do fałszywej hipotezy. Ponadto mogą to być względy dydaktyczne. Np. gdy studenci na egzaminach często korzystają z jakiegoś fałszywego „wzoru" lub „twierdzenia". Także ten punkt nie zawsze pojawi się w opisie. Staraliśmy się, aby przykłady i kontrprzykłady były ustawione w rosnącym stopniu trudności. Początkowe z nich są zwykle bardzo proste. Najtrudniejsze przykłady i kontrprzykłady oznaczono gwiazdką. W nawiasie kwadratowym na początku przykładu lub kontrprzykładu umieszczone są numery, które oznaczają źródło w bibliografii. Brak tego symbolu oznacza, że przykład lub kontrprzykład jest powszechnie znany. Z kolei symbol [A] oznacza przykład lub kontrprzykład przygotowany przez autorów książki.

Dziękujemy dr. Jerzemu Cisło za kilka ciekawych przykładów i kontrprzykładów, które umieściliśmy w książce, oraz dr. Alfredowi Witkowskiemu za zgodę na wykorzystanie dowodu z korespondencji prywatnej.

Czytelników prosimy o przysyłanie propozycji przykładów i kontrprzykładów z analizy matematycznej, które warto dołączyć do kolejnego wydania książki. Będziemy wdzięczni za informacje o zauważonych błędach lub usterkach.

Marian Gewert
Zbigniew Skoczylas

*Wykresy funkcji Dirichleta, Riemanna, Weierstrassa i van der Weardena mają charakter poglądowy, który ma uświadomić Czytelnikowi ich faktyczny wygląd (niemożliwy do przedstawienia).

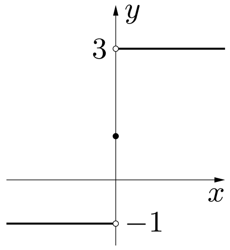
Wprowadzenie

Twierdzenia w matematyce mają zwykle postać

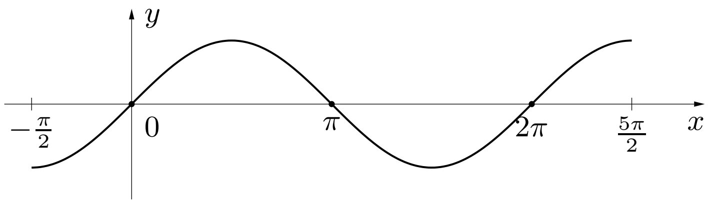
$$(*) \qquad \bigwedge_{x\in X} Z(x) \Longrightarrow T(x),$$

w której założenie Z oraz teza T są funkcjami zdaniowymi zmiennej x z niepustego zbioru X. Formę zdaniową $(*)$, przed podaniem jej dowodu, nazywamy hipotezą. Jeśli hipoteza jest fałszywa, to element $x \in X$, który spełnia założenie, ale nie spełnia tezy, nazywamy kontrprzykładem. Na wykładach z matematyki kontrprzykłady podaje się, aby uzasadnić, że założenia omawianych twierdzeń są istotne, tzn. ich osłabienie prowadzi do fałszywych hipotez. Z kolei w badaniach naukowych potrzeba znalezienia kontrprzykładu pojawia się, gdy stawiane są nowe hipotezy albo próbuje się wzmocnić, odwrócić czy też uogólnić znane twierdzenia.

Pierwszy rodzaj kontrprzykładów omawianych w książce jest związany z próbami osłabienia założeń twierdzeń lub wzmocnienia ich tez. Np. gdy w twierdzeniu Bolzano o miejscach zerowych funkcji ciągłej f w przedziale $[a, b]$ zrezygnujemy z ciągłości, to otrzymamy fałszywą hipotezę. Kontrprzykładem jest np. funkcja $f(x) = 1 + 2\,\mathrm{sgn}(x)$ rozważana na przedziale $[a, b] = [-1, 1]$.



Przy okazji zauważmy, że w tym twierdzeniu nie można wzmocnić tezy do postaci „*istnieje tylko jeden punkt $c \in (a, b)$ taki, że $f(c) = 0$*”. Kontrprzykładem jest funkcja $f(x) = \sin x$ rozważana na przedziale $[a, b] = [-\pi/2, 5\pi/2]$. Mamy bowiem $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$, $f(2\pi) = 0$.



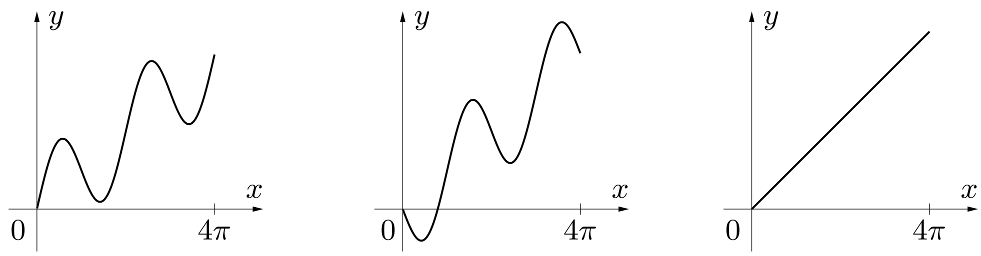
Drugą sytuacją, gdy może pojawić się potrzeba wskazania kontrprzykładu, jest sprawdzanie, czy hipoteza powstała przez odwrócenie kierunku implikacji w jakimś twierdzeniu jest prawdziwa (twierdzenie odwrotne). Np. dla dowolnych funkcji f, g określonych na przedziale (a, b) prawdziwa jest implikacja

$$(\text{funkcje } f \text{ i } g \text{ są rosnące na } (a,b)) \Longrightarrow (\text{funkcja } f+g \text{ jest rosnąca na } (a,b))\,.$$

Jednakże implikacja odwrotna

$$(\text{funkcja } f+g \text{ jest rosnąca na } (a,b)) \Longrightarrow (\text{funkcje } f \text{ i } g \text{ są rosnące na } (a,b))\,.$$

jest fałszywa. Kontrprzykładem są np. funkcje $f(x) = \dfrac{x}{2} + 2\sin x$, $g(x) = \dfrac{x}{2} - 2\sin x$ rozważane na przedziale $(a, b) = (0, 4\pi)$.



$f(x) = \dfrac{x}{2} + 2\sin x$ $\qquad$ $g(x) = \dfrac{x}{2} - 2\sin x$ $\qquad$ $f(x) + g(x) = x$

Przy okazji zauważmy, że te same funkcje są kontrprzykładem świadczącym, że osłabiona hipoteza

$$(\text{funkcja } f+g \text{ jest rosnąca na } (a,b)) \Longrightarrow (\text{funkcja } f \text{ lub } g \text{ jest rosnąca na } (a,b))$$

także jest fałszywa.

Z trzecią sytuacją, kiedy potrzebujemy wskazać kontrprzykład, mamy do czynienia, gdy badamy hipotezę, która jest uogólnieniem znanego twierdzenia. Sytuacją tego typu jest np. próba przeniesienia nierówności $|\sin x| \leqslant 1$ prawdziwej dla $x \in \mathbb{R}$, na zbiór liczb zespolonych $\mathbb{C}$. W tym zbiorze rolę wartości bezwzględnej pełni moduł liczby zespolonej, zaś funkcja sinus jest określona dla $z = x + iy$ wzorem

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

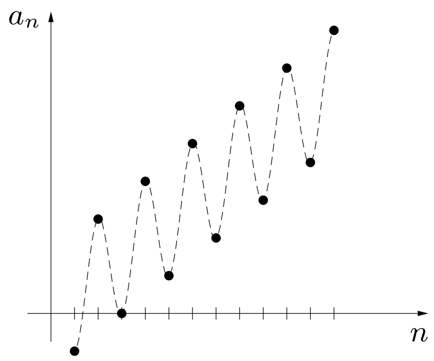
Jednakże nierówność $|\sin z| \leqslant 1$ nie jest prawdziwa dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$. Kontrprzykładem jest np. $z = i \ln 3$. Mamy bowiem

$$|\sin z| = |\sin(i \ln 3)| = \sinh(\ln 3) = \frac{4}{3} > 1.$$

Najciekawsze kontrprzykłady pojawiają się wtedy, gdy wydaje się, że hipoteza jest prawdziwa, a w rzeczywistości tak nie jest. Np. początkujący student może sądzić, że dla dowolnego ciągu liczbowego (a_n) prawdziwa jest implikacja

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = \infty\right) \Longrightarrow \left(\text{ciąg } (a_n) \text{ jest rosnący od pewnego miejsca}\right).$$

Jednak tak nie jest, a kontrprzykładem jest np. ciąg o wyrazach $a_n = n + 3\cos \pi n$.



W książce stosujemy standardowe definicje oraz oznaczenia. Przy czym pojęcia ciąg rosnący (malejący) rozumiemy w ścisłym sensie. Tak samo rozumiemy pojęcia funkcji rosnącej (malejącej) oraz funkcji wypukłej w dół (w górę) na przedziale. Z kolei w określeniu pochodnej niewłaściwej w punkcie zakładamy, że funkcja jest ciągła. Zaś w definicji pochodnej kierunkowej funkcji wielu zmiennych przyjmujemy, że $t \to 0^+$. Przypominamy, że funkcją elementarną nazywamy funkcję, którą można otrzymać z funkcji: stałej c, potęgowej x^p, trygonometrycznej $\sin x$, wykładniczej $\exp x$, logarytmicznej $\ln x$ oraz cyklometrycznej $\arcsin x$ za pomocą skończonej liczby działań arytmetycznych oraz operacji składania. Funkcje oraz ciągi i szeregi funkcyjne są określone zwykle na przedziałach $[0, 1]$, $[-1, 1]$, $[-\pi/2, \pi/2]$ albo $[0, \infty)$. Dotyczy to także całek oznaczonych. Granice oraz pochodne funkcji najczęściej rozważane są w 0, a granice podwójne i pochodne cząstkowe funkcji dwóch zmiennych — w punkcie $(0, 0)$. Z kolei szeregi potęgowe mają zwykle środek w 0. Dzięki temu prezentowane ciągi, funkcje, szeregi, całki itd. mają prostszą postać. Skale na osiach układu współrzędnych nie zawsze będą takie same. Robimy tak, aby na wykresie lepiej uwidocznić własności funkcji.

Oznaczenia zbiorów liczbowych:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – zbiór liczb naturalnych,

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ – zbiór liczb całkowitych,

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ – zbiór liczb całkowitych nieujemnych,

$\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych,

$\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych,

$\mathbb{C}$ – zbiór liczb zespolonych,

$\mathbb{P}$ – zbiór liczb pierwszych,

$2\mathbb{Z} = \{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, \ldots\}$ – zbiór liczb parzystych.

1

Zbiory i funkcje

W rozdziale rozważamy przykłady i kontrprzykłady związane z liczbami wymiernymi i niewymiernymi, kresami zbiorów, wykresami funkcji, składaniem funkcji, funkcjami ograniczonymi, monotonicznymi, okresowymi i innymi. Ponadto rozważamy podzbiory prostej i płaszczyzny o nietypowych własnościach.

■ **1.1.** Liczby niewymierne x, y, których suma $x+y$, iloczyn xy oraz iloraz x/y są wymierne:

$$x=\sqrt{2}, \quad y=-\sqrt{2}.$$

■ **1.2.** Liczby niewymierne x, y takie, że liczba x^y jest wymierna:

$$x=\sqrt{2}, \quad y=\log_2 9.$$

■ **1.3.** Liczba niewymierna α, w której rozwinięciu dziesiętnym znajdują się wszystkie liczby naturalne:

$$\alpha = 0.\mathbf{1}0\mathbf{2}00\mathbf{3}000\mathbf{4}0000\mathbf{5}00000\mathbf{6}000000\mathbf{7}0000000\mathbf{8}\ldots$$

Uzasadnienie. Reguła tworzenia kolejnych cyfr liczby α po przecinku jest następująca: po każdej liczbie naturalnej dodajemy tyle zer, ile ona wynosi. Otrzymana liczba jest niewymierna, bo jej rozwinięcie nie jest okresowe od pewnego miejsca. Wynika, to z faktu, że dostatecznie daleko w rozwinięciu wystąpi dowolnie długi ciąg samym zer.

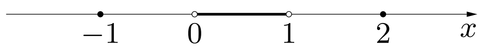
Uwaga. Przypuszcza się, że rozwinięcia dziesiętne liczby π oraz e mają tę samą własność.

■ **1.4.** Zbiór liczb rzeczywistych, który jest ograniczony, ale nie zawiera swoich kresów:

$$(0,1).$$

■ **1.5.** Zbiór liczb rzeczywistych, który zawiera oba swoje kresy, ale nie jest domknięty:

$$\{-1\} \cup (0,1) \cup \{2\}\,.$$

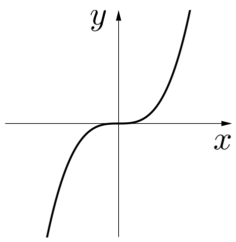


■ **1.6.** Wyrażenia, które na żadnym zbiorze liczb rzeczywistych nie określają funkcji rzeczywistej:

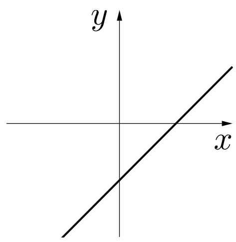
$$\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}, \quad \ln(\cos x - 2), \quad \arcsin\left(3+x^2\right), \quad (-1)^{\left\lfloor x^2+1\right\rfloor \sqrt{2}}.$$

■ **1.7.** Funkcje f, g określone na $\mathbb{R}$ takie, że ich złożenia $f \circ g$, $g \circ f$ są innymi funkcjami:

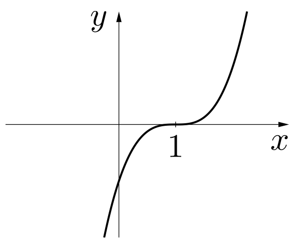
$f(x) = x^3$,



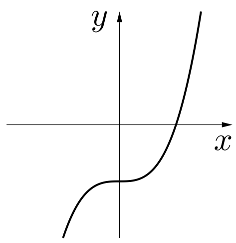
$g(x) = x - 1$,



$(f \circ g)\,(x) = (x-1)^3$,



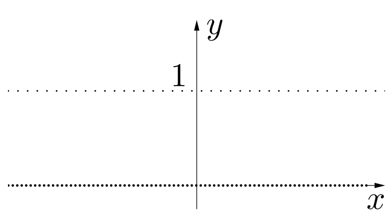
$(g \circ f)\,(x) = x^3 - 1$.



Uwaga. Z tego przykładu wynika, że składanie funkcji nie jest przemienne.

■ **1.8.** Funkcja f okresowa różna od stałej, która nie ma najmniejszego okresu:

$$f(x) = D(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

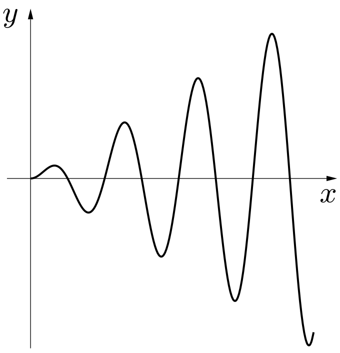


Uzasadnienie. Pokażemy, że okresem funkcji D jest każda dodatnia liczba wymierna. Niech $w > 0$ będzie liczbą wymierną. Wtedy dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy $D(x+w) = D(x)$. To oznacza, że w jest okresem funkcji D.

Uwaga. Funkcja ta nazywana jest funkcją Dirichleta*. Ma ona wiele innych zadziwiających własności. Pojawi się w książce w wielu miejscach jako element przykładów i kontrprzykładów.

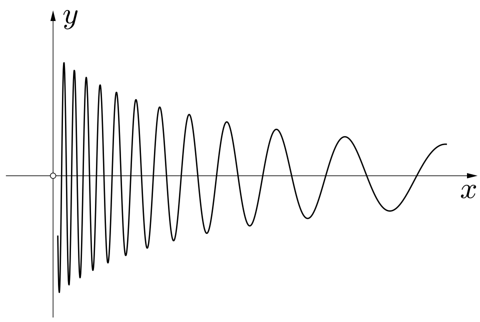
■ **1.9.** Funkcja f, która nie jest ograniczona z góry ani z dołu na $[0,\infty)$:

$$f(x) = x\sin x.$$



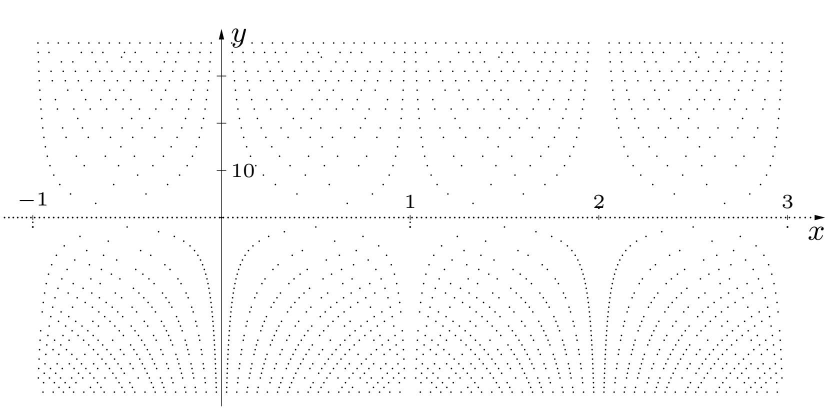
■ **1.10.** Funkcja f, która nie jest ograniczona z góry ani z dołu na żadnym przedziale $(0,a]$ $(a>0)$:

$$f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}.$$



■ **1.11.** [25] $(*)$ Funkcja f określona na $\mathbb{R}$, która nie jest ograniczona z góry ani z dołu na żadnym przedziale $[a,b]\subset\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^p q & \text{dla} \quad x = \dfrac{p}{q} \ \ (p\in\mathbb{Z}\ \ q\in\mathbb{N}\,\text{są względnie pierwsze})\,, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \text{ oraz } x\notin\mathbb{Q}. \end{cases}$$



*Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859), matematyk niemiecki pochodzenia francuskiego.

Uzasadnienie. Przypuśćmy, że na pewnym przedziale $[a,b]$ funkcja f jest ograniczona. Wtedy wszystkie liczby wymierne p/q z tego przedziału miałyby ograniczone mianowniki. Również liczniki byłyby ograniczone. To oznaczałoby, że w przedziale $[a,b]$ jest tylko skończona ilość liczb wymiernych. Otrzymaliśmy sprzeczność. Zatem funkcja f ma zapowiedzianą własność.

■ **1.12.** [75] (∗) Funkcja S określona na $\mathbb{R}$, której wykres jest gęsty w $\mathbb{R}^2$:

$$S(x) = \begin{cases} b + a\sqrt{2} & \text{dla} \quad x = a + b\sqrt{2}, \text{ gdzie } a, b \in \mathbb{Q}, \\ x & \text{dla} \quad \text{pozostałych } x. \end{cases}$$

Uzasadnienie. Niech (x_0, y_0) będzie dowolnym punktem płaszczyzny. Pokażemy, że istnieje ciąg (x_n, y_n) punktów wykresu funkcji S zbieżny do (x_0, y_0). Wybieramy ciągi (u_n), (v_n), (w_n) liczb wymiernych zbieżne odpowiednio do x_0, y_0, $\sqrt{2}$. Przyjmujemy

$$x_n = (v_n w_n - u_n) + (u_n w_n - v_n)\sqrt{2}.$$

Wtedy

$$y_n = f(x_n) = (u_n w_n - v_n) + (v_n w_n - u_n)\sqrt{2}.$$

Ponadto mamy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \left(y_0\sqrt{2} - x_0\right) + \left(x_0\sqrt{2} - y_0\right)\sqrt{2} = x_0$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \left(x_0\sqrt{2} - y_0\right) + \left(y_0\sqrt{2} - x_0\right)\sqrt{2} = y_0,$$

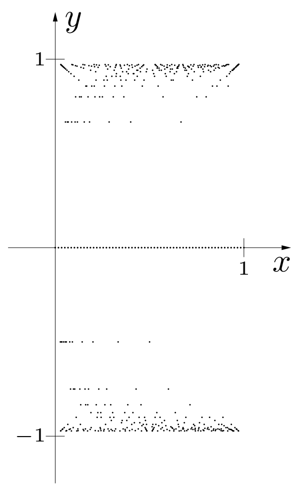
co kończy dowód.

Uwaga. Funkcję S wymyślił Wacław Sierpiński[†].

■ **1.13.** [25] (∗) Funkcja f ograniczona na $[0,1]$, która w żadnym przedziale $[a,b] \subset [0,1]$ nie ma maksimum ani minimum lokalnego:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{q(-1)^q}{q+1} & \text{dla} \quad x = \dfrac{p}{q} \ (p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \text{ są względnie pierwsze}), \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

[†] Wacław Franciszek Sierpiński (1982 – 1969), polski matematyk. Zajmował się teorią liczb oraz teorią mnogości.



Uzasadnienie. Zauważmy, że dla każdego $q \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest nierówność podwójna

$$-1 < \frac{q}{q+1}(-1)^q < 1.$$

Stąd wynika, że funkcja f jest ograniczona. Jasne jest, że ewentualne ekstrema lokalne funkcja f może mieć jedynie w punktach wymiernych. Przypuśćmy, że punkcie $x_0 = p_0/q_0$ funkcja f ma maksimum lokalne właściwe. Wtedy oczywiście q_0 jest liczbą parzystą. Ponadto istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że dla liczb wymiernych p/q spełniających warunek

$$(*) \qquad 0 < \left|\frac{p_0}{q_0} - \frac{p}{q}\right| < \delta$$

mamy

$$f\left(\frac{p_0}{q_0}\right) = \frac{q_0}{q_0+1} > f\left(\frac{p}{q}\right).$$

Rozważmy liczby wymierne postaci

$$\frac{p}{q} = \frac{p_0}{q_0} \cdot \frac{np_0}{np_0+1},$$

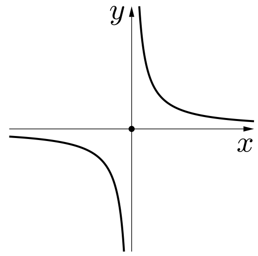
gdzie n jest liczbą względnie pierwszą z q_0. Dla dostatecznie dużych takich n spełniony jest warunek $(*)$. Jednakże wtedy mamy

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{q_0\,(np_0+1)}{q_0\,(np_0+1)+1} = \frac{q_0}{q_0 + \dfrac{1}{np_0+1}} > \frac{q_0}{q_0+1}.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność. Zatem w żadnym punkcie funkcja f nie ma maksimum lokalnego. Dowód dla minimum lokalnego jest analogiczny.

■ **1.14.** Funkcja f różnowartościowa na $\mathbb{R}$, która nie jest ściśle monotoniczna na $\mathbb{R}$:

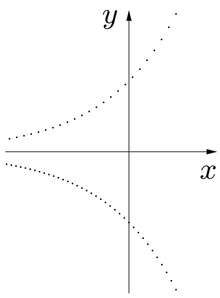
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$



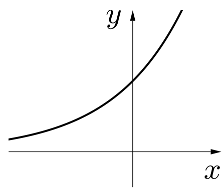
Uwaga. Powyższa funkcja jest kontrprzykładem ukazującym, że hipoteza odwrotna do twierdzenia „*jeżeli funkcja jest ściśle monotoniczna na* $\mathbb{R}$*, to jest różnowartościowa na* $\mathbb{R}$” jest fałszywa.

■ **1.15.** Funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, która na żadnym przedziale nie jest rosnąca ani malejąca (nawet w słabym sensie), ale funkcja $|f|$ jest rosnąca na $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ -e^x & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

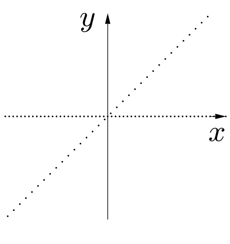


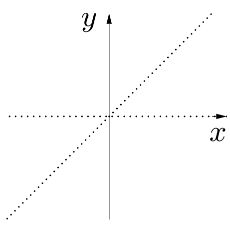
$$|f(x)| = e^x.$$

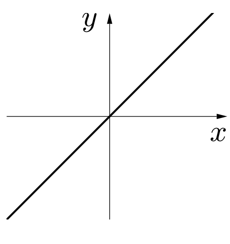


■ **1.16.** Funkcje f, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, które na żadnym przedziale nie są rosnące, ale ich suma $f + g$ jest funkcją rosnącą na $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ x & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad f(x) + g(x) = x.$$



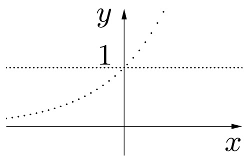


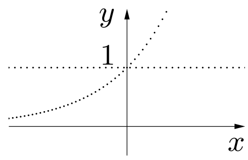


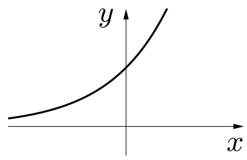
Uwaga. Jest to kontrprzykład świadczący, że stwierdzenie odwrotne do następującego „*suma funkcji rosnących jest rosnąca*” jest fałszywe.

■ **1.17.** Funkcje f, $g : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$, które na żadnym przedziale $[a, b] \subset \mathbb{R}$ nie są monotoniczne, ale ich iloczyn fg jest funkcją rosnącą na $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ e^x & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad f(x)g(x) = e^x.$$

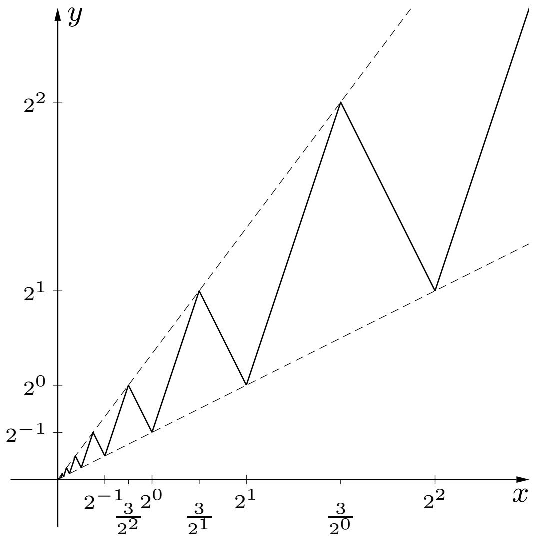






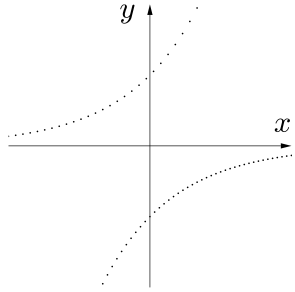
■ **1.18.** [A] Funkcja f ciągła na przedziale $(0, \infty)$, która dla każdego $x > 0$ spełnia nierówność $f(x) < f(2x)$, ale nie jest rosnąca na $(0, \infty)$:

Konstrukcja. Konstrukcję funkcji f przedstawiono poniżej.



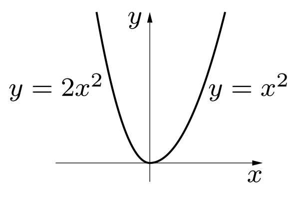
■ **1.19.** Funkcja f różnowartościowa na $\mathbb{R}$, która nie jest monotoniczna na żadnym przedziale:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{dla} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ -e^{-x} & \text{dla} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$



■ **1.20.** [59] Funkcja ciągła f, której obcięcie do zbioru liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest różnowartościowe, ale nie jest ona różnowartościowa na $\mathbb{R}$:

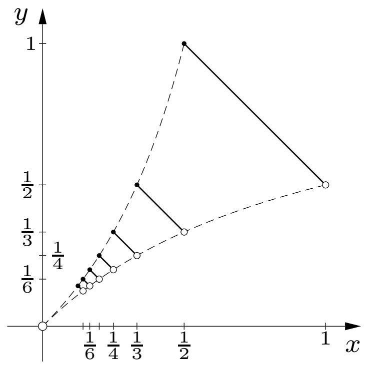
$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{dla} \quad x < 0, \\ x^2 & \text{dla} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$



Uzasadnienie. Fakt, że funkcja f nie jest różnowartościowa na $\mathbb{R}$ jest oczywisty. Przypuśćmy, że funkcja f również nie jest różnowartościowa na $\mathbb{Q}$. Wtedy istnieją liczby wymierne w_1, w_2 $(w_1 < 0 < w_2)$ takie, iż $f(w_1) = f(w_2)$, czyli $2(w_1)^2 = (w_2)^2$. Stąd mamy $-\sqrt{2}w_1 = w_2$. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną. Zatem funkcja f jest różnowartościowa na $\mathbb{Q}$.

■ **1.21.** [77] Funkcja f, która różnowartościowo przekształca przedział $(0,1)$ na przedział $(0,1]$:

$$f(x) = \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil} + \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{x} \right\rceil - 1} - x \quad \text{dla } 0 < x < 1.$$



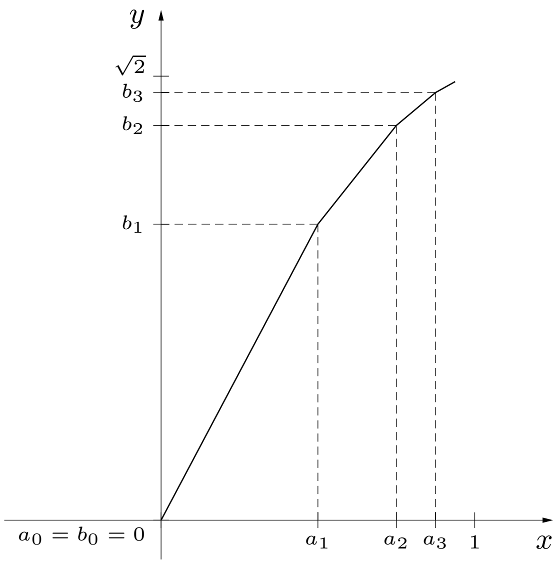
■ **1.22.** [A] Funkcja f różnowartościowa na $\mathbb{R}$, która przyjmuje tylko wartości niewymierne:

Konstrukcja. Niech (w_n) oznacza ciąg wszystkich liczb wymiernych o niepowtarzających się wyrazach, w którym $w_1 = 0$. Ponadto niech $\sqrt{2}\mathbb{Q}$ oznacza zbiór $\left\{w\sqrt{2} : w \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\right\}$. Funkcję $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ określamy wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\mathbb{Q} \cup \sqrt{2}\mathbb{Q}\right\}, \\ w_{2n}\sqrt{2} & \text{dla } x = w_n, \\ w_{2n-1}\sqrt{2} & \text{dla } x = w_n\sqrt{2}. \end{cases}$$

■ **1.23.** [A] Funkcja ciągła i różnowartościowa $f : (0,1) \xrightarrow{\text{na}} \left(0, \sqrt{2}\right)$, która przekształca liczby niewymierne z przedziału $(0,1)$ na liczby niewymierne z przedziału $\left(0, \sqrt{2}\right)$:

Konstrukcja. Według pomysłu Alfreda Witkowskiego. Niech $a_0 = 0$, a_1, a_2, $a_3, \ldots$ oraz $b_0 = 0$, b_1, b_2, $b_3, \ldots$ będą rosnącymi ciągami liczb wymiernych zbieżnymi odpowiednio do 1 oraz do $\sqrt{2}$. Funkcję f określamy tak, aby spełniała warunek: $f(a_n) = b_n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, a na przedziałach $[a_{n-1}, a_n]$ była liniowa. Ponieważ liczby a_n oraz b_n są wymierne, więc funkcja f przeprowadza liczby niewymierne z przedziału (a_{n-1}, a_n) na liczby niewymierne z przedziału (b_{n-1}, b_n). A zatem spełnia warunki zadania.



■ **1.24.** [25] (∗) Funkcja L określona na $[0,1]$ taka, że obrazem dowolnego przedziału $[a,b] \subset [0,1]$ jest $[0,1]$:

$$L(0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6\ldots) = 0,$$

gdy liczba $0.a_1a_3a_5\ldots$ jest niewymierna oraz

$$L(0.a_1a_2a_3a_4a_5a_6\ldots) = 0.a_{2n}a_{2n+2}a_{2n+4}\ldots,$$

gdy okres liczby wymiernej $0.a_1a_3a_5\ldots$ zaczyna się od cyfry a_{2n-1}.

Uzasadnienie. W rozwinięciach dziesiętnych liczb z przedziału $[0,1]$ wykluczamy te, w których od pewnego miejsca są same „9". Niech $[a,b] \subset [0,1]$ będzie dowolnym przedziałem. Cyfry c_1, $c_2, \ldots, c_{2n-1}$ oraz $n \geqslant 2$ dobieramy tak, aby liczby

$$0.c_1c_2\ldots c_{2n-2}0 \quad \text{oraz} \quad 0.c_1c_2\ldots c_{2n-2}1$$

należały do przedziału $[a,b]$, przy czym cyfra c_{2n-3} jest różna od 0 i 1. Dalsze cyfry o indeksach nieparzystych wybieramy następująco $c_{2n-1} = c_{2n+1} = \ldots = c_{4n-5} = 0$ oraz $c_{4n-3} = 1$. Kolejne n cyfr powtarzamy okresowo stawiając je na miejscach nieparzystych.

Wybierzmy teraz dowolny punkt $y = 0.b_1b_2b_3\ldots$ z przedziału $[0, 1]$. Przyjmujemy

$$x = 0.c_1c_2c_3\ldots c_{2n-1}b_1a_{2n+1}b_2a_{2n+3}\ldots$$

Oczywiście punkt x należy do przedziału $[a, b]$. Ponieważ liczba

$$0.c_1c_3c_5\ldots c_{2n-3}c_{2n-1}c_{2n+1}\ldots$$

ma okresowe rozwiniecie, którego pierwszy okres zaczyna się od cyfry c_{2n-1}, więc

$$L(x) = 0.b_1b_2b_3\ldots = y.$$

Co należało pokazać.

Uwaga. Funkcja L została skonstruowana przez H. Lebesgue'a[‡]. Funkcja ta ma dodatkową własność: każda jej wartość jest przyjmowana nieskończenie wiele razy. Rzeczywiście, wystarczy zauważyć, że w przedziale $[0, 1]$ można wskazać nieskończenie wiele rozłącznych przedziałów domkniętych postaci $[1/(2n+1), 1/2n]$, $n \in \mathbb{N}$.

■ **1.25.** $(*)$ Funkcja f określona na $\mathbb{R}$ taka, że obrazem każdego przedziału (a, b) jest $\mathbb{R}$:

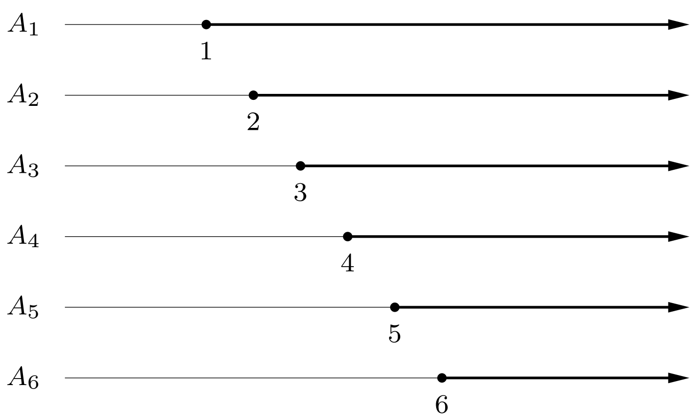
$$f(x) = \operatorname{ctg}\left(\pi L\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,ctg} x\right)\right),$$

gdzie L oznacza funkcję Lebesgue'a z poprzedniego przykładu.

■ **1.26.** Rodzina (A_n) zstępujących podzbiorów nieskończonych prostej taka, że ich przekrój jest zbiorem pustym, tzn. dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzą warunki:

$$A_n \subset \mathbb{R},\ \operatorname{card}(A_n) = \infty, A_n \supset A_{n+1},\ \text{ale} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset:$$

$$A_n = [n, \infty),\ n \in \mathbb{N}.$$

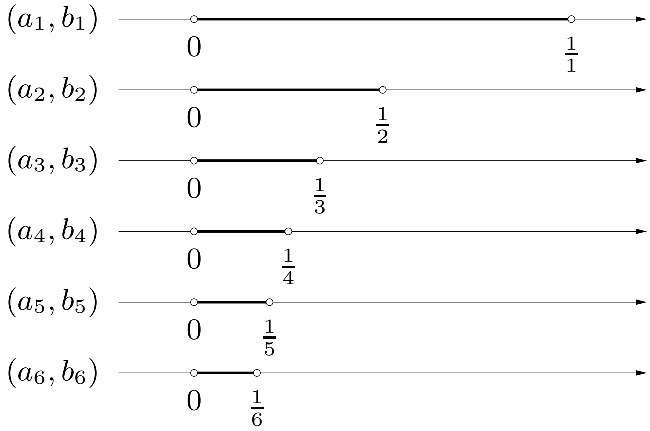


[‡]Henri Léon Lebesgue (1875 – 1941), francuski matematyk.

■ **1.27.** Rodzina (a_n, b_n) zstępujących przedziałów otwartych na prostej, o długości zmierzającej do 0 taka, że ich przekrój jest zbiorem pustym, tzn. dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzą warunki:

$$\mathbb{R} \supset (a_n, b_n) \supset (a_{n+1}, b_{n+1}), \quad \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0, \text{ ale } \bigcap_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) = \emptyset:$$

$$(a_n, b_n) = \left(0, \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

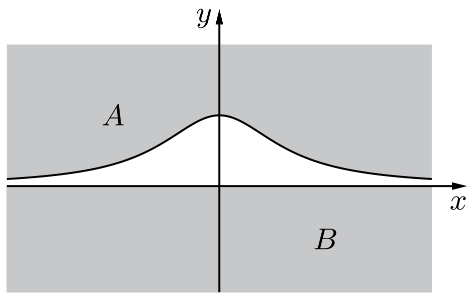


Uwaga. Jest to kontrprzykład świadczący, że w twierdzeniu Cantora o zstępującej rodzinie przedziałów domkniętych o długościach dążących do 0, nie można zrezygnować z domkniętości.

■ **1.28.** Zbiory A, B domknięte i rozłączne na płaszczyźnie, odległość między którymi jest równa 0:

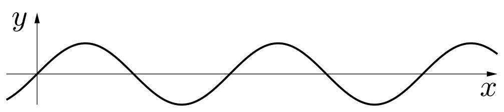
$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R},\ y \geqslant \frac{1}{1 + x^2}\right\},$$

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R},\ y \leqslant 0\right\}.$$

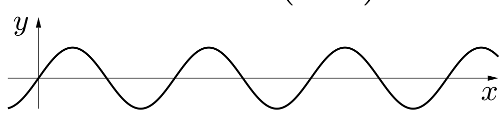


■ **1.29.** Funkcje okresowe f i g, których suma ani iloczyn nie są funkcjami okresowymi:

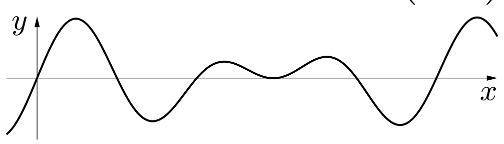
$$f(x) = \sin x,$$



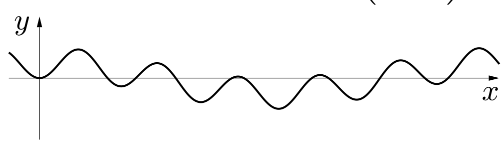
$$g(x) = \sin\left(\sqrt{2}x\right).$$



$$f(x) + g(x) = \sin x + \sin\left(\sqrt{2}x\right)$$

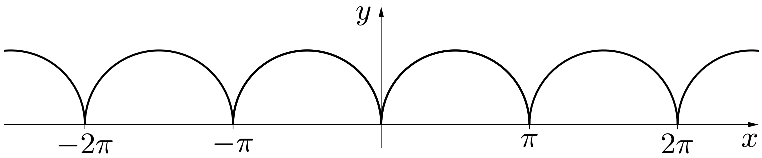


$$f(x)g(x) = \sin x \sin\left(\sqrt{2}x\right)$$



■ **1.30.** Funkcja elementarna, której wykres składa się z nieskończonej liczby stycznych półokręgów:

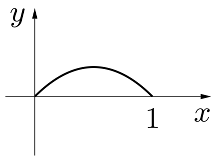
$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - (\arccos|\sin x|)^2}.$$



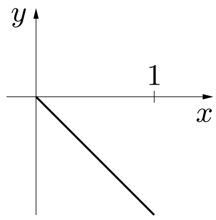
■ **1.31.** Funkcje f i g takie, że

$$\sup\{f(x)+g(x) : x \in [0,1]\} \neq \sup\{f(x) : x \in [0,1]\} + \sup\{g(x) : x \in [0,1]\} :$$

$f(x) = x - x^2,$



$g(x) = -x.$



Uzasadnienie. Mamy

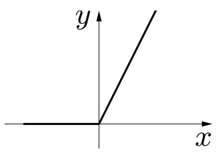
$$\sup\{f(x) : x \in [0,1]\} + \sup\{g(x) : x \in [0,1]\} =$$
$$= \sup\left\{x - x^2 : x \in [0,1]\right\} + \sup\{-x : x \in [0,1]\} = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4},$$

ale

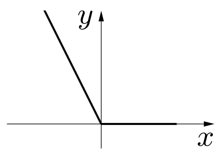
$$\sup\{f(x) + g(x) : x \in [0,1]\} = \left\{-x^2 : x \in [0,1]\right\} = 0 \neq \frac{1}{4}.$$

■ **1.32.** Funkcje f, g nieujemne na $\mathbb{R}$, których iloczyn jest funkcją zerową, ale żadna z nich nie jest funkcją zerową:

$f(x) = |x| + x,$



$g(x) = |x| - x.$



■ **1.33.** (∗) Nieprzeliczalny zbiór domknięty o mierze Lebesgue'a zero:

Konstrukcja. Konstrukcję zbioru o powyższej własności rozpoczynamy od przedziału domkniętego $[0,1]$. Oznaczamy go przez C_0. W pierwszym kroku ze środka zbioru C_0 usuwamy przedział otwarty o długości $1/3$, tj. $(1/3, 2/3)$. Pozostały zbiór domknięty oznaczamy przez C_1. W drugim kroku ze środków obu pozostałych przedziałów usuwamy przedziały otwarte o długości $1/3^2$, tj. $(1/9, 2/9)$ oraz $(7/9, 8/9)$. Otrzymany zbiór domknięty, który składa sie z czterech przedziałów. Oznaczamy go przez C_2. Trzecim kroku ze środków czterech przedziałów usuwamy przedziały otwarte o długości $1/3^3$. Otrzymany zbiór oznaczamy przez C_3. Tę procedurę kontynuujemy do nieskończoności. Dostaniemy ciąg zbiorów domkniętych C_0, C_1, C_2, $C_3, \ldots$

Zbiór C o żądanych własnościach jest przekrojem zbiorów C_n, tzn. $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$.

Uzasadnienie. Zbiór C jest domknięty, bo jest przekrojem zbiorów domkniętych. Miara tego zbioru jest równa 0. Wynika to z faktu, że suma długości przedziałów usuniętych w czasie jego konstrukcji jest równa 1. Mamy bowiem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1.$$

Z kolei nieprzeliczalność tego zbioru wynika z faktu, że składa się on z wszystkich liczb z przedziału $[0, 1]$, których rozwinięcia trójkowe zawierają tylko zera i dwójki.

Uwaga. Zbiór o powyższych własnościach skonstruował Cantor i nosi on jego imię. Zbiór ten zostanie wykorzystany w konstrukcji funkcji ciągłej f na przedziale $[0, 1]$, która na końcach przedziału przyjmuje wartości $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, a jej pochodna prawie wszędzie jest równa 0 (zobacz 4.35). Zbiór Cantora spełnia warunek $C \oplus C = [0, 2]$, gdzie $\oplus$ oznacza sumę kompleksową zbiorów. Zauważył to i pokazał H. Steinhaus.

■ **1.34.** Nieprzeliczalny zbiór domknięty złożony tylko z liczb niewymiernych:

$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(w_n - \frac{1}{2^n}, w_n + \frac{1}{2^n} \right)$, gdzie (w_n) jest ciągiem wszystkich liczb wymiernych.

Uzasadnienie. Ponieważ przedziały

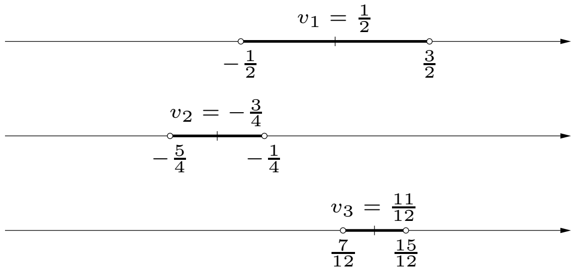
$$\left(w_n - \frac{1}{2^n}, w_n + \frac{1}{2^n} \right)$$

są otwarte, więc ich suma jest zbiorem otwartym. Zatem dopełnienie tej sumy jest zbiorem domkniętym. Oczywiste jest, że dopełnienie zawiera tylko liczby niewymierne. Otrzymany zbiór jest nieprzeliczany, gdyż suma długości tych przedziałów jest równa 2, a prosta ma długość ∞.

■ **1.35.** Ciąg (v_n) liczb wymiernych taki, że przedziały otwarte o środku v_n i długości $2/n$ pokryją całą prostą, tj. $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(v_n - \frac{1}{n}, v_n + \frac{1}{n}\right) = \mathbb{R}$:

$$v_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n}\right).$$

Uzasadnienie. Z postaci ciągu (v_n) wynika, że kolejne przedziały dołączamy do sumy mnogościowej raz z prawej strony, a raz z lewej.



Uzasadnienie podamy dla przedziałów dokładanych z prawej strony. Ciąg

$$|v_n| = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

jest rosnący i rozbieżny do ∞, więc wystarczy pokazać, że sąsiednie przedziały

$$\left(v_n - \frac{1}{n}, v_n + \frac{1}{n}\right), \qquad \left(v_{n+2} - \frac{1}{n+2}, v_{n+2} + \frac{1}{n+2}\right)$$

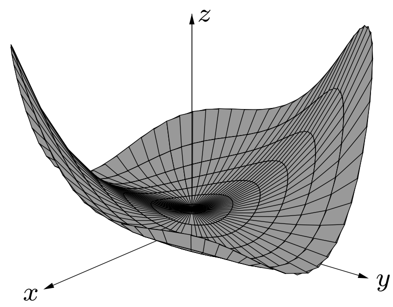
co najmniej zachodzą na siebie. Tak jest, gdyż prawy koniec pierwszego przedziału jest większy od lewego końca drugiego. Rzeczywiście, dla $n \in \mathbb{N}$ prawdziwe są nierówności

$$\left(v_n + \frac{1}{n} > v_{n+2} - \frac{1}{n+2}\right) \iff \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} > v_{n+2} - v_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4}\right).$$

Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla przedziałów dokładanych z lewej strony.

■ **1.36.** Wielomian W dwóch zmiennych taki, że $W(\mathbb{R},\mathbb{R}) = (0,\infty)$:

$$W(x,y) = x^2 + (xy-1)^2.$$



Uzasadnienie. Dla dowolnego punktu $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ prawdziwa jest nierówność

$$W(x,y) = x^2 + (xy-1)^2 \geqslant 0.$$

Równość $x^2 + (xy-1)^2 = 0$ jest możliwa tylko wtedy, gdy $x = 0$ oraz $xy = 1$, a te warunki są sprzeczne. Zatem $W(x,y) > 0$. Ponadto dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n > 1/\sqrt{\varepsilon}$. A dla takiego n mamy

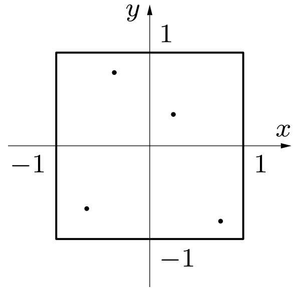
$$W\left(\frac{1}{n}, n\right) = \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

To oznacza, że $W(\mathbb{R},\mathbb{R}) = (0,\infty)$.

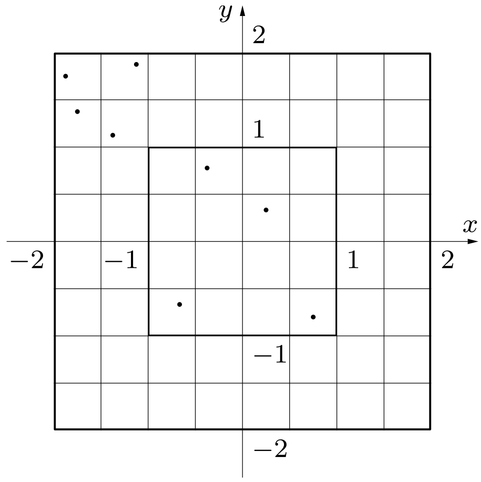
Uwaga. Wielomian W jest kontrprzykładem świadczącym, że próba przeniesienia twierdzenia *„jeśli wielomian jednej zmiennej przyjmuje na $\mathbb{R}$ dowolnie małe wartości dodatnie, to w pewnym miejscu przyjmuje wartość* 0" na wielomiany dwóch zmiennych, prowadzi do fałszywej hipotezy.

■ **1.37.** [25] $(*)$ Zbiór gęsty na płaszczyźnie złożony z punktów o obu współrzędnych wymiernych taki, że na każdej prostej pionowej i poziomej leży co najwyżej jeden jego punkt:

Konstrukcja. Zbiór określimy rekurencyjnie. W pierwszym kroku w każdym z 4 kwadratów o boku 1 otaczających początek układu współrzędnych wybieramy po jednym punkcie o obu współrzędnych wymiernych tak, aby żadne dwa punkty nie należały do tej samej prostej pionowej ani poziomej.



W drugim kroku, stosując te same reguły, wybieramy po jednym punkcie w każdym z 64 kwadratów o boku 1/2, które tworzą kwadrat o środku w początku układu i boku 4. Oczywiście, gdy w którymś z kwadratów został wcześniej wybrany punkt, to przechodzimy do kolejnego kwadratu. W każdym kolejnym kroku konstrukcji dwukrotnie zwiększamy o 2 bok dużego kwadratu i dwukrotnie zmniejszamy bok małych kwadratów. Zbiór, który otrzymamy po nieskończenie wielu krokach, spełnia zapowiedziane warunki.



Uwaga. Warunek ten spełnia także wykres funkcji Sierpińskiego (zobacz 1.12).

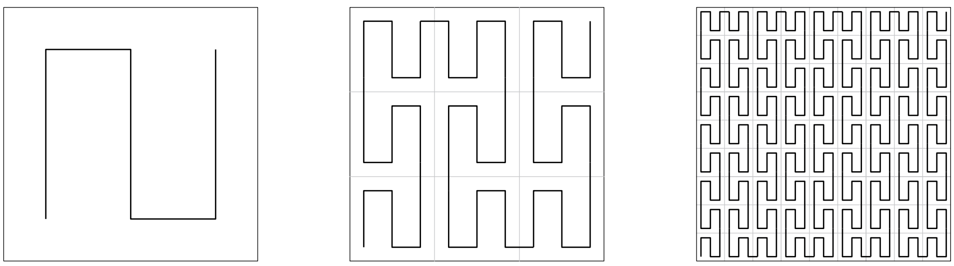
■ **1.38.** [25] Przekształcenie $\boldsymbol{F}$ odcinka $[0,1]$ na kwadrat $[0,1] \times [0,1]$:

$$\boldsymbol{F}(t) = (x(t), y(t)) = \begin{cases} (\overline{0.c_1c_3c_5c_7\ldots_2}, \overline{0.c_2c_4c_6c_8\ldots_2}) & \text{dla} \quad t \in [0,1), \\ (1,1) & \text{dla} \quad t = 1, \end{cases}$$

gdzie $\overline{0.c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8\ldots_2}$ jest rozwinięciem dwójkowym liczby t, które nie zawiera nieskończenie wielu jedynek od pewnego miejsca.

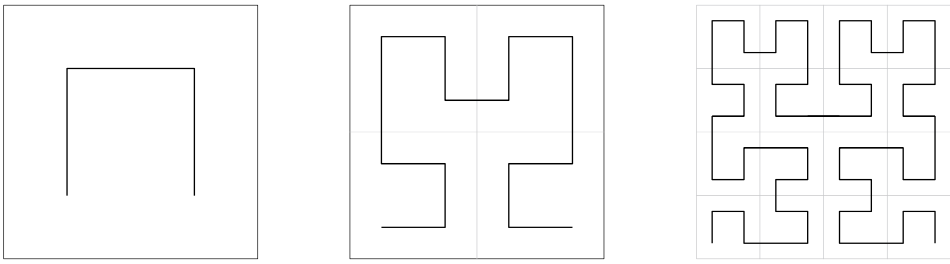
Uwaga. Przekształcenie $\boldsymbol{F}$ nie jest ciągłe.

■ **1.39.** $(*)$ Przekształcenie ciągłe $\boldsymbol{F}$ odcinka $[0,1]$ na kwadrat $[0,1] \times [0,1]$: Na rysunkach przedstawiono pierwszy, drugi i trzeci etap konstrukcji krzywych, których granica jest obrazem przekształcenia $\boldsymbol{F}$. Konstrukcja ta została podana przez G. Peano[§]. Kolejne przybliżenia nazywamy krzywymi Peano.



[§]Giuseppe Peano (1858 – 1932), włoski matematyk i logik.

Innym przykładem o tych samych własnościach jest krzywa skonstruowana przez D. Hilberta[¶].



Uwaga. Ciekawy przykład funkcji ciągłej $\boldsymbol{F}$, która przekształca przedział $[0,1]$ na domknięte koło jednostkowe takiej, że dla każdego $0 \leqslant t \leqslant 1$ obraz $\boldsymbol{F}([0,t])$ jest zbiorem wypukłym, podali A. Vince, D.C. Wilson [74].

■ **1.40.** [A] Ciąg (P_k) wielomianów o rosnących stopniach i współczynnikach wymiernych taki, że suma ich wykresów jest zbiorem gęstym w $\mathbb{R}^2$:

Konstrukcja. Niech $\{(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}\}$ będzie zbiorem punktów płaszczyzny o obu współrzędnych wymiernych, który jest w gęsty w $\mathbb{R}^2$, a jego elementy spełniają warunek:

$$x_n \neq x_m \quad \text{oraz} \quad y_n \neq y_m \quad \text{dla} \quad n \neq m.$$

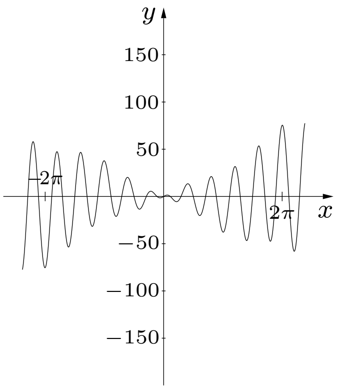
Zbiór taki został skonstruowany w przykładzie 1.37. Ciąg (P_n) wielomianów określimy rekurencyjnie. Dla $n = 1$ przyjmujemy $P_1(x) = y_1$. Dla $n = 2$ przyjmujemy, że wielomian P_2 jest funkcją liniową, która przechodzi przez punkty (x_1, y_1), (x_2, y_2). Ponieważ $y_1 \neq y_2$, więc wielomian P_2 ma stopień 1, a jego współczynniki są wymierne. Załóżmy, że wielomiany P_1, P_2, $\ldots, P_n$ są już określone i spełniają warunki: mają współczynniki wymierne, ich stopnie rosną, a wykres wielomianu P_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ zawiera punkty (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots, (x_k, y_k)$. Określimy teraz wielomian P_{n+1}. Ze wzoru interpolacyjnego Lagrange'a wynika, że istnieje wielomian o współczynnikach wymiernych, który przechodzi przez punkty (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1}). Jeżeli stopień otrzymanego wielomianu jest większy od stopnia wielomianu P_n, to przyjmujemy, że jest to wielomian P_{n+1} i przechodzimy do określenia kolejnego. Jeśli zaś stopnie wielomianów są jednakowe, to żądamy, aby wielomian przechodził także przez punkt (x_{n+2}, y_{n+2}). Jeśli nadal stopień wielomianu nie zmieni się, to dokładamy kolejne punkty zbioru gęstego. Ta procedura musi spowodować kiedyś zwiększenie stopnia wielomianu, gdyż inaczej wszystkie punkty zbioru gęstego będą należały do ustalonego wielomianu, a to nie jest

[¶]David Hilbert (1862 - 1943), niemiecki matematyk.

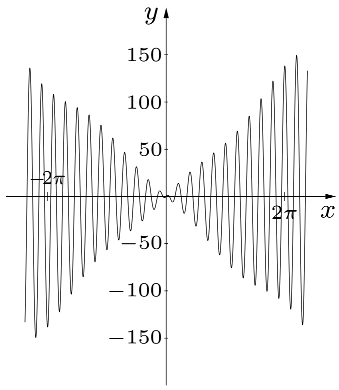
możliwe. W ten sposób określiliśmy ciąg (P_n) wielomianów. To, że suma wykresów tych wielomianów jest gęsta na płaszczyźnie jest oczywiste.

■ **1.41.** Funkcja f ciągła na $\mathbb{R}$ taka, że suma krzywych $y = f(nx)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest zbiorem gęstym w $\mathbb{R}^2$:

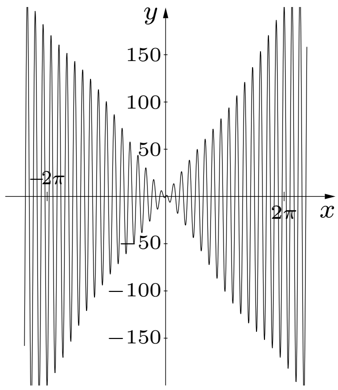
$$f(x) = x \cos x$$



$f(5x) = 5x \cos 5x$,



$f(10x) = 10x \cos 10x$,



$f(5x) = 15x \cos 15x$.