Metalogika

Jerzy Pogonowski

Zakład Logiki i Kognitywistyki UAM
pogon@amu.edu.pl

Pojęcie nieskończoności

Po co o tym mówić na tym wykładzie?

Studenci nauk kognitywnych powinni, naszym zdaniem, zmierzyć się z intelektualnym oswojeniem pojęcia nieskończoności.

- Pojęcie to jest niezbędne w rozważaniach matematycznych oraz logicznych.
- Słuchacze pamiętają zapewne, jak ważny w konstrukcjach logicznych jest Lemat Königa (nieskończone drzewo skończenie generowane ma gałąź nieskończoną) lub Lemat Kuratowskiego-Zorna (jeśli każdy łańcuch w zbiorze częściowo uporządkowanym ma ograniczenie górne, to w zbiorze tym istnieje element maksymalny).
- Pojęcie nieskończoności jest również obecne w rozważaniach przeprowadzanych w innych naukach.

Gdzie spotykamy nieskończoność?

Pojęcie nieskończoności pojawia się w wielu kontekstach:

- Nieskończenie duże
- Nieskończenie małe
- Nieskończenie złożone

- Analiza matematyczna: granica, ciągłość, pochodna, szereg nieskończony.
- Arytmetyka: modele niestandardowe arytmetyki PA.
- Teoria mnogości: liczby porządkowe i kardynalne.
- Topologia: obiekty fraktalne.
- Analiza niestandardowa: nieskończenie małe.
- Geometria: punkty i proste w nieskończoności.

Notacja

- Jeśli zbiory X i Y są równoliczne (czyli gdy istnieje bijekcja z X na Y), to piszemy: $|X| = |Y|$.
- Jeśli istnieje iniekcja z X w Y, to piszemy $|X| \leqslant |Y|$.
- Jeśli $|X| \leqslant |Y|$ oraz nie zachodzi $|X| = |Y|$, to piszemy $|X| < |Y|$.

- Zbiory X i Y są *tej samej mocy*, gdy są równoliczne, czyli gdy $|X| = |Y|$.
- Zbiór X jest *mocy niewiększej niż* zbiór Y, gdy $|X| \leqslant |Y|$.
- Zbiór X jest *mocy mniejszej niż* zbiór Y, gdy $|X| < |Y|$.

To tylko *sposób mówienia*. Nie zdefiniowaliśmy dotąd, czym są *moce* zbiorów.

Od paradoksu do definicji

- Fakt równoliczności pewnych zbiorów ze swoimi podzbiorami właściwymi uważany był długo za paradoksalny (Proklos, Galileusz, Bolzano).
- Rozwiązanie paradoksu zaproponował Richard Dedekind.

- *Definicja Dedekinda.* Zbiór jest *nieskończony*, gdy jest równoliczny z jakimś swoim podzbiorem właściwym. W przeciwnym przypadku jest *skończony*.
- Zbiór jest *przeliczalny*, jeśli jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{N}$ wszystkich liczb naturalnych. Piszemy $|A| = \aleph_0$ zamiast $|A| = |\mathbb{N}|$.
- Zbiór nieskończony, który nie jest przeliczalny, nazywamy *nieprzeliczalnym*.
- Jeśli $|A| = |\mathbb{R}|$, to mówimy, że A *jest mocy kontinuum* i piszemy $|A| = \mathfrak{c}$.

Czy wszystkie zbiory nieskończone są równoliczne?

Twierdzenie Cantora. *Żaden zbiór nie jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów.*

Dowód. Przeprowadzimy dowód nie wprost.

- Weźmy dowolny zbiór X i przypuśćmy, że X jest równoliczny z rodziną wszystkich swoich podzbiorów $\wp(X)$. Oznacza to, iż istnieje bijekcja f ze zbioru X na zbiór $\wp(X)$. Określmy następujący element rodziny $\wp(X)$: $X_f = \{x \in X \ : \ x \notin f(x)\}$.
- Wtedy dla pewnego $x_f \in X$ musiałoby być: $f(x_f) = X_f$. Stąd i z definicji zbioru X_f otrzymujemy, iż: $x_f \in X_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_f \notin X_f$, a to jest *sprzeczność*.
- Musimy zatem odrzucić przypuszczenie o istnieniu funkcji f. W konsekwencji, X oraz $\wp(X)$ nie są równoliczne.

Konsekwencje twierdzenia Cantora

Metoda użyta w dowodzie twierdzenia Cantora nazywa się *metodą przekątniową*. Na poprzednim wykładzie wykorzystano ją pokazując, że nie można ponumerować w sposób wzajemnie jednoznaczny liczbami naturalnymi wszystkich gałęzi pełnego drzewa dwójkowego.

- Jednym z wniosków z tego twierdzenia jest to, że zbiór $\mathbb{N}$ nie jest równoliczny ze swoim zbiorem potęgowym $\wp(\mathbb{N})$. Oznacza to, że nie można ponumerować w sposób wzajemnie jednoznaczny liczbami naturalnymi wszystkich zbiorów liczb naturalnych.
- Innym wnioskiem jest oczywiście to, że jeśli utworzymy nieskończony ciąg zbiorów nieskończonych:

$$(\mathbb{N}, \;\; \wp(\mathbb{N}), \;\; \wp(\wp(\mathbb{N})), \;\; \wp(\wp(\wp(\mathbb{N}))), \ldots),$$

  to żadne dwa wyrazy tego ciągu nie będą równoliczne.

Czy istnieją zbiory nieskończone?

Istnienie co najmniej jednego zbioru nieskończonego jest przyjmowane w teorii mnogości – na mocy aksjomatu nieskończoności:
$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$
Każdy zbiór x spełniający ten warunek nazywamy *induktywnym*.

Znane są inne jeszcze definicje zbiorów skończonych i nieskończonych, np.:

- *Gottlob Frege*. Definicja liczb naturalnych wykorzystująca zasadę Hume'a i własności dziedziczne.
- *Ernst Zermelo*. $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\{\{\emptyset\}\}\}$, $\ldots$
- *John von Neumann*. Definicja odwołująca się do liczb porządkowych i kardynalnych (za chwilę ją omówimy).
- *Alfred Tarski*. Zbiór x jest skończony, jeśli każdy $\subseteq$-łańcuch w $\wp(x)$ jest domknięty na kres górny.

Mierzenie nieskończoności

Mówimy, że zbiór X jest:

- *przechodni*, gdy każdy element X jest podzbiorem X;
- *liczbą porządkową*, gdy X jest zbiorem przechodnim i dla wszystkich różnych elementów $Y, Z \in X$ zachodzi alternatywa: $Y \in Z$ lub $Z \in Y$;
- *liczbą kardynalną*, gdy jest liczbą porządkową i $|Y| < |X|$ dla wszystkich $Y \in X$.

- Liczby porządkowe oznaczamy literami α, β, γ, itd.
- Elementy dowolnej liczby porządkowej są liczbami porządkowymi.
- Definiujemy: $\alpha \prec \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha \in \beta$. Niech $\alpha \preceq \beta$ oznacza, że $\alpha \prec \beta$ lub $\alpha = \beta$.

Operacja von Neumanna

- Dla dowolnego zbioru x niech $x^* = x \cup \{x\}$.
- Jakie zbioru otrzymujemy wychodząc od zbioru pustego $\emptyset$, iterując powyższą operację?

- $\emptyset^* = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$ czyli zbiór, którego jedynym elementem jest zbiór pusty.
- $\{\emptyset\}^* = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ czyli zbiór, który ma dwa elementy.
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}^* = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ czyli zbiór, który ma trzy elementy. Itd.
- Oznaczmy: $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, itd.; ogólnie: następnikiem liczby n jest zbiór n^*, czyli $n \cup \{n\}$.
- Niech ω oznacza sumę tych wszystkich zbiorów. Jest to najmniejsza nieskończona liczba porządkowa.

- Dla każdej liczby porządkowej α, relacja $\preceq$ dobrze porządkuje α.
- Jeśli α jest liczbą porządkową, to $\alpha \cup \{\alpha\}$ jest liczbą porządkową.
- Jeśli A jest zbiorem liczb porządkowych, to $\bigcup A$ jest liczbą porządkową.
- Nie istnieje zbiór wszystkich liczb porządkowych.
- Mówimy, że liczba porządkowa α jest:
  1. *liczbą następnikową*, gdy $\alpha = \emptyset$ lub $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$ dla pewnej liczby porządkowej β;
  2. *liczbą graniczną*, gdy α nie jest liczbą następnikową.
- Liczba ω jest graniczną liczbą porządkową. Liczba porządkowa α jest graniczna wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha = \bigcup \alpha$.
- Zbiór ω wszystkich skończonych liczb porządkowych jest przeliczalny, a każdy jego element jest zbiorem skończonym.

Gwarancje poprawności

- **Zasada indukcji pozaskończonej**. *Niech φ będzie dowolną formułą języka teorii mnogości ZF. Jeśli dla każdej liczby porządkowej α oraz wszystkich $\beta \in \alpha$, formuła $\varphi(\beta)$ implikuje formułę $\varphi(\alpha)$, to dla wszystkich liczb porządkowych α zachodzi $\varphi(\alpha)$.*
- **Twierdzenie o rekursji pozaskończonej**. *Niech ψ będzie formułą taką, że dla każdego x istnieje dokładnie jeden y taki, że $\psi(x, y)$. Wtedy: dla każdej liczby porządkowej α istnieje dokładnie jedna funkcja f o dziedzinie α taka, że dla wszystkich $\beta \in \alpha$ zachodzi $\psi(f \upharpoonright \beta, f(\beta))$.*

- Powyższe dwa twierdzenia umożliwiają poprawne zdefiniowanie działań dodawania i mnożenia liczb porządkowych.
- Zamiast $\alpha \cup \{\alpha\}$ pisze się często $\alpha + 1$.

Działania na liczbach porządkowych

- $\alpha + 0 = \alpha$
- $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$
- $\alpha + \lambda = \bigcup\{\alpha + \beta : \beta \prec \lambda\}$ dla λ granicznych.

- $\alpha \cdot 0 = 0$
- $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$
- $\alpha \cdot \lambda = \bigcup\{\alpha \cdot \beta : \beta \prec \lambda\}$ dla λ granicznych.

Mamy np.:

- $1 + \omega = \omega \prec \omega + 1$
- $2 \cdot \omega = \omega \prec \omega \cdot 2 = \omega + \omega \prec \omega \cdot \omega$

Hierarchia kumulatywna

- Przypominamy, że α jest *liczbą kardynalną*, gdy jest liczbą porządkową i $|\beta| < |\alpha|$ dla wszystkich $\beta \in \alpha$. Liczby porządkowe α o tej własności nazywane są także *początkowymi liczbami porządkowymi*.
- Jeśli α jest nieskończoną liczbą kardynalną, to α jest graniczną liczbą porządkową.
- Nie każda liczba porządkowa jest liczbą kardynalną. Dla przykładu, liczby porządkowe $\omega + \omega$ oraz $\omega \cdot \omega$ nie są liczbami kardynalnymi.

Przez indukcję pozaskończoną definiujemy *hierarchię kumulatywną zbiorów*:

- $V_0 = \emptyset$
- $V_{\alpha+1} = \wp(V_\alpha)$
- $V_\lambda = \bigcup\{V_\beta : \beta \prec \lambda\}$ dla λ granicznych.

Funkcja Hartogsa

- Każdy zbiór V_α jest przechodni.
- Dla każdego zbioru X istnieje liczba porządkowa α taka, że $X \subseteq V_\alpha$.
- V_ω to rodzina zbiorów *dziedzicznie skończonych*.

- Dowodzi się, że dla każdego zbioru X istnieje liczba porządkowa α taka, że: nie istnieje iniekcja $f : \alpha \to X$.
- Dla dowolnego zbioru X niech: $H(X)$ = *liczba Hartogsa zbioru* X = $\prec$-najmniejsza liczba porządkowa α taka, że nie istnieje iniekcja $f : \alpha \to X$.
- Jeśli κ jest liczbą kardynalną, to $H(\kappa)$ jest najmniejszą liczbą kardynalną większą od κ (tradycyjnie oznaczaną też przez κ^+).
- Najmniejsza nieprzeliczalna liczba porządkowa to $\omega_1 = H(\omega)$.

Skala alefów i moce zbiorów

Przez indukcję pozaskończoną definiujemy *skalę alefów*:

- $\aleph_0 = \omega$
- $\aleph_{\alpha+1} = H(\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha^+$
- $\aleph_\lambda = \bigcup\{\aleph_\beta : \beta \prec \lambda\}$ dla λ granicznych.

- Alefy tworzą ciąg *pozaskończony*:
  $\aleph_0 \prec \aleph_1 \prec \aleph_2 \prec \ldots \aleph_\omega \prec \aleph_{\omega+1} \prec \aleph_{\omega+2} \prec \ldots \aleph_{\omega+\omega} \prec \ldots$
- Dla każdej nieskończonej liczby kardynalnej κ istnieje liczba porządkowa α taka, że $\kappa = \aleph_\alpha$.
- Dla każdego zbioru X istnieje dokładnie jedna liczba kardynalna κ taka, że $|X| = |\kappa|$. Nazywamy ją *mocą zbioru* X. Gdy $|X| = |\kappa|$, to *piszemy* $|X| = \kappa$. Moc zbioru to najmniejsza liczba porządkowa równoliczna z tym zbiorem.

Dodawanie, mnożenie, potęgowanie

- $\kappa + \lambda = |(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})|$
- $\kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda|$
- $\kappa^\lambda = |\kappa^\lambda|$.

- Jeśli κ i λ są nieskończonymi liczbami kardynalnymi, to $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.
- Definiujemy dowolne sumy oraz iloczyny liczb kardynalnych:
  1. $\sum_{i \in I} \kappa_i = |\bigcup_{i \in I} (\kappa_i \times \{i\})|$
  2. $\prod_{i \in I} \kappa_i = |\prod_{i \in I} \kappa_i|$.
- **Twierdzenie Königa**. *Jeśli $\lambda_i \prec \kappa_i$ dla wszystkich $i \in I$, to*:

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \prec \prod_{i \in I} \kappa_i.$$

Liczby kardynalne regularne

- *Współkońcowością* liczby kardynalnej κ nazywamy najmniejszą liczbę porządkową α taką, że: istnieje funkcja $f : \alpha \to \kappa$ taka, że dla każdej $\beta \prec \kappa$ istnieje $\gamma \prec \alpha$ taka, że $\beta \prec f(\gamma)$. Współkońcowość κ oznaczamy przez $cf(\kappa)$.
- Mówimy, że nieskończona liczba kardynalna κ jest *regularna*, gdy $\kappa = cf(\kappa)$. Liczby kardynalne, które nie są regularne, nazywamy *singularnymi*.

- $cf(\kappa)$ jest najmniejszą liczbą kardynalną λ taką, że zbiór mocy κ jest sumą λ swoich podzbiorów mocy mniejszej niż κ.
- Mamy np.: $cf(\aleph_0) = cf(\aleph_\omega) = cf(\aleph_{\omega+\omega}) = cf(\aleph_{\omega^\omega}) = \aleph_0$.
- Liczba κ jest regularna wtedy i tylko wtedy, gdy dowolna suma mniej niż κ zbiorów mocy mniejszej niż κ ma moc mniejszą niż κ. Liczba $\aleph_0$ jest regularna. Każda liczba postaci $\aleph_{\alpha+1}$ jest regularna.

Moc kontinuum

- **König**. Jeśli κ jest nieskończona, to $\kappa \prec cf(2^{\kappa})$. W szczególności: $\aleph_0 \prec cf(2^{\aleph_0})$.
- Jeśli κ jest nieskończona, to $cf(\kappa)$ jest regularna $(cf(cf(\kappa)) = \kappa)$.
- Liczby $\aleph_\omega$ oraz $\aleph_{\omega_1}$ nie są regularne $(cf(\aleph_{\omega_1}) = \aleph_1 \prec \aleph_{\omega_1})$.

- Liczbę $2^{\aleph_0}$ nazywamy *kontinuum* i oznaczamy przez $\mathfrak{c}$. Liczba kardynalna $\mathfrak{c}$ jest nieprzeliczalna.
- $|\mathbb{R}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$.
- Żaden zbiór mocy kontinuum nie jest sumą przeliczalnie wielu swoich podzbiorów mocy mniejszej niż kontinuum.
- $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0^n = \aleph_0$, dla wszystkich $n \in \omega$.
- $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}^n = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$, dla wszystkich $n \in \omega$.

Dwie skale liczb kardynalnych

Można określić dwie skale nieskończonych liczb kardynalnych:

Skala alefów:

- $\aleph_0 = \omega$
- $\aleph_{\alpha+1} = H(\aleph_\alpha) = \aleph_\alpha^+$
- $\aleph_\lambda = \bigcup\{\aleph_\beta : \beta \prec \lambda\}$ dla λ granicznych.

Skala betów:

- $\beth_0 = \aleph_0 = \omega$
- $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$
- $\beth_\gamma = \bigcup\{\beth_\beta : \beta \prec \lambda\}$ dla λ granicznych.

Jak mają się do siebie te dwie skale?

Hipoteza kontinuum

Następujących zdań nie można ani udowodnić, ani odrzucić na mocy aksjomatów teorii mnogości ZF:

- **CH** (*hipoteza kontinuum*): $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$
- **GCH** (*uogólniona hipoteza kontinuum*): $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$ dla wszystkich liczb porządkowych α.

Jest tak, ponieważ:

- **Kurt Gödel** udowodnił, że jeśli ZF jest niesprzeczna, to niesprzeczna jest ZF wraz z GCH.
- **Paul Cohen** udowodnił, że jeśli ZF jest niesprzeczna, to niesprzeczna jest ZF wraz z zaprzeczeniem GCH.

W konsekwencji, oba te zdania są *niezależne* od teorii mnogości ZF.

Przykłady

- Liczba kardynalna κ jest *graniczna*, gdy κ jest nieprzeliczalna oraz $\lambda^+ \prec \kappa$ dla wszystkich $\lambda \prec \kappa$. $\aleph_\alpha$ jest graniczną liczbą kardynalną wtedy i tylko wtedy, gdy α jest graniczną liczbą porządkową.
- κ jest *słabo nieosiągalna*, gdy κ jest regularną graniczną liczbą kardynalną.
- κ jest *mocno nieosiągalna* (*nieosiągalna*), gdy κ jest słabo nieosiągalna i $2^\lambda \prec \kappa$ dla wszystkich $\lambda \prec \kappa$.

- Istnienie liczb mocno nieosiągalnych nie wynika z aksjomatów teorii mnogości ZF.
- Rozważa się także *znacznie większe* liczby kardynalne niż liczby mocno nieosiągalne (np. liczby *mierzalne*).