Prezentowany poniżej materiał opracowany został w oparciu o E-podręcznik AGH pt."Algebra liniowa i geometria analityczna" `https://epodreczniki.open.agh.edu.pl/openagh-podreczniki.php?categId=4`

ALGEBRA - część I

1 Działania na macierzach

Definicja 1: Macierz **Macierzą rzeczywistą (zespoloną)** o m wierszach i n kolumnach oraz **elementach** a_{ij}, gdzie $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ nazywamy prostokątną tablicę liczb rzeczywistych (zespolonych)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Macierz o m wierszach i n kolumnach nazywamy macierzą **wymiaru** $m \times n$. Macierz wymiaru $m \times n$ utworzoną z elementów a_{ij} oznaczamy również symbolem $A = (a_{ij})_{m\times n}$. W przypadku, gdy wymiar macierzy jasno wynika z kontekstu, stosujemy zapis $A = (a_{ij})$. Macierz, której wszystkie elementy są równe 0 nazywamy **macierzą zerową** i oznaczamy symbolem $\mathbb{O}$.
Zbiór macierzy wymiaru $m \times n$ o elementach ze zbioru liczb rzeczywistych oznaczamy symbolem $\mathbb{R}^{m\times n}$, natomiast dla oznaczenia zbioru macierzy o elementach ze zbioru liczb zespolonych stosujemy zapis $\mathbb{C}^{m\times n}$.
Definicja 2: Suma i różnica macierzy
Niech $A = (a_{ij})_{m\times n}$ i $B = (b_{ij})_{m\times n}$ będą macierzami wymiaru $m \times n$.

1. **Sumą** macierzy A i B (ozn. $(A + B)$ nazywamy macierz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ taką, że każdy element macierzy C jest sumą odpowiednich elementów macierzy A i B tj. dla każdej pary (ij), gdzie $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ zachodzi równość $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

2. **Różnicą** macierzy A i B (ozn. $A - B$) nazywamy macierz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ taką, że każdy element macierzy C jest różnicą odpowiednich elementów macierzy A i B tj. dla każdej pary (ij), gdzie $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ zachodzi równość $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Wprost z definicji wynika, że dodawać i odejmować możemy tylko macierze takich samych wymiarów.

Przykład 1

Rozważmy macierze A i B postaci $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Wówczas

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 & 11 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

natomiast

$$A - B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poniżej podaje przykład powyższych obliczeń za pomocą wolframalpha.com,
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=%7B%7B5,0,-1,6%7D,%7B-2,0,3,1%7D,%7B1,2,-1,0%7D%7D%2B%7B%7B2,3,1,5%7D,%7B1,1,0,0%7D,%7B3,-1,-1,0%7D%7D`
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=%7B%7B5,0,-1,6%7D,%7B-2,0,3,1%7D,%7B1,2,-1,0%7D%7D-%7B%7B2,3,1,5%7D,%7B1,1,0,0%7D,%7B3,-1,-1,0%7D%7D`

Definicja 3: Mnożenie macierzy przez liczbę

Niech α będzie liczbą rzeczywistą lub zespoloną i niech $A = (a_{ij})_{m\times n}$. **Iloczynem** macierzy A i liczby α, oznaczanym symbolem αA, nazywamy macierz wymiaru $m \times n$, której elementy są równe $\alpha \cdot a_{ij}$.

Przykład 2:

$$-3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 \\ -3 & -6 & 3 \\ 3 & -9 & -6 \\ 0 & -3 & -9 \end{pmatrix}.$$

Obliczenia za pomocą wolframalpha.com, `https://www.wolframalpha.com/input/?i=-3*%7B%7B1,0,2%7D,%7B1,2,-1%7D,%7B-1,3,2%7D,%7B0,1,3%7D%7D`

Twierdzenie 1: Własności dodawania macierzy i mnożenia macierzy przez liczbę

Niech A, B, C będą macierzami tego samego wymiaru. Zachodzą następujące własności:

1. Dodawanie macierzy jest przemienne i łączne tj. $A + B = B + A$ oraz $(A + B) + C = A + (B + C)$;

2. Macierz zerowa jest elementem neutralnym dodawania tj. $A + \mathbb{O} = \mathbb{O} + A = A$;

3. Dla macierzy A macierz $-A$, określona jako $-A = -1 \cdot A$, jest elementem przeciwnym do A tj. $A + (-A) = \mathbb{O}$;

4. Mnożenie macierzy przez liczbę jest rozdzielne względem dodawania macierzy tj. zachodzi $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$;

5. Mnożenie macierzy przez liczbę jest łączne tj. $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$.

Definicja 4: Iloczyn macierzy przez macierz
Rozważmy macierz $A = (a_{ij})$ wymiaru $m \times k$ oraz macierz $B = (b_{ij})$ wymiaru $k \times n$.
Iloczynem macierzy A i B (ozn. $A \cdot B$) nazywamy macierz $C = (c_{ij})$ wymiaru $m \times n$, której element c_{ij} jest określony wzorem

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj}, \tag{2}$$

dla $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.
Zgodnie z definicją iloczyn macierzy $A \cdot B$ jest określony wtedy i tylko wtedy, gdy liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B. Otrzymana macierz $A \cdot B$ ma tyle wierszy, co macierz A i tyle kolumn, co macierz B. Mnożąc macierze trzeba pamiętać, że działanie to **nie jest przemienne**.
Przykład 3:
Wykonajmy mnożenie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3) = (14)\,.$$

Mnożąc macierz wymiaru 1×3 przez macierz wymiaru 3×1 otrzymaliśmy macierz wymiaru 1×1. Wymnóżmy teraz

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Mnożąc macierz wymiaru 3×1 przez macierz wymiaru 1×3 otrzymaliśmy macierz wymiaru 3×3.

Do mnożenia macierzy wygodnie jest stosować następujący schemat, zwany **schematem Falka**, polegający na odpowiednim ułożeniu mnożonych macierzy. Mnożąc mianowicie macierz A przez macierz B zapisujemy obie macierze w tabeli następująco

$$\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & C \end{array},$$

przy czym symbolem C oznaczamy, jak w definicji, iloczyn $A \cdot B$. Następnie mnożymy kolejne elementy pierwszego wiersza macierzy A przez kolejne elementy pierwszej kolumny macierzy B, otrzymane iloczyny sumujemy i zapisujemy wynik w lewym górnym rogu pola oznaczonego jako C, tj. w miejscu elementu c_{11}. Podobnie mnożymy kolejne elementy pierwszego wiersza macierzy A przez kolejne elementy drugiej kolumny macierzy B, sumujemy otrzymane iloczyny i zapisujemy wynik w miejscu elementu c_{12} itd.

Przykład 4:

Niech $A = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1-i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 1-i \\ 2 & 3 & 3-i & 0 \\ -1 & -i & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Mamy:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 1-i \\ 2 & 3 & 3-i & 0 \\ -1 & -i & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1-i \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} i+2 & 3 & 2-i & 1+i \\ 17+i & 20-i & 23-5i & 5-5i \end{pmatrix} \end{array}.$$

Przykładowo, aby wyliczyć wartość elementu znajdującego się w pierwszym wierszu i drugiej kolumnie macierzy $A \cdot B$ wykonujemy działania $i \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-i) = 3$.

Obliczenia za pomocą wolframalpha.com, `https://www.wolframalpha.com/input/?i=%7B%7Bi,1,0%7D,%7B4,7,1-i%7D%7D.%7B%7B1,0,i,1-i%7D,%7B2,3,3-i,0%7D,%7B-1,-i,2,1%7D%7D`

Twierdzenie 2: Własności iloczynu macierzy Niech A, B, C będą macierzami. Jeżeli poszczególne działania są wykonalne, to zachodzą następujące własności:

1. $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$;
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
3. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

2 Szczególne typy macierzy

Definicja 1: Macierz zerowa Macierz, której wszystkie elementy są równe zero, nazywamy **macierzą zerową**. Macierz zerową oznaczamy symbolem $\mathbb{O}$.

Definicja 2: Macierz kwadratowa, główna przekątna

1. Jeżeli liczba wierszy macierzy jest równa liczbie jej kolumn, to mówimy, że dana macierz jest **kwadratowa**. Jeżeli liczba wierszy i kolumn macierzy jest równa n, to wówczas mówimy, że macierz jest **stopnia** n.

2. **Główną przekątną** macierzy kwadratowej $A = (a_{ij})$ stopnia n nazywamy zbiór elementów, dla których numer wiersza i numer kolumny są równe, tj. zbiór elementów $\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$.

Definicja 3: Macierz trójkątna górna, macierz trójkątna dolna

1. **Macierzą trójkątną górną** nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie elementy leżące pod główną przekątną są równe zero.

2. **Macierzą trójkątną dolną** nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie elementy leżące nad główną przekątną są równe zero.

Przykład 1: Rozważmy macierz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 2 \\ 0 & 2i & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$.

Główną przekątną powyższej macierzy stanowi zbiór elementów $\{1, 2i, -i, i\}$. Ponieważ wszystkie elementy leżące pod główną przekątną są równe zero, zatem mamy do czynienia z macierzą trójkątną górną.

Definicja 4: Macierz diagonalna Macierzą diagonalną nazywamy macierz kwadratową, której wszystkie elementy leżące poza główną przekątną są równe zero.

Definicja 5: Macierz jednostkowa Macierzą jednostkową nazywamy macierz diagonalną, której wszystkie elementy leżące na głównej przekątnej są równe 1.

Macierz jednostkową stopnia n oznaczamy symbolem I_n. Czasami, jeżeli nie ma wątpliwości co do wymiaru danej macierzy jednostkowej, pomijamy dolny indeks pisząc po prostu I.

Przykład 2:

Macierz jednostkowa stopnia 3 jest postaci $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Definicja 6: Macierz transponowana Jeżeli $A = (a_{ij})$ jest macierzą wymiaru $m \times n$ to **macierzą transponowaną do** A lub **transpozycją** A nazywamy macierz $A^T = (a_{ij}^T)$ wymiaru $n \times m$, której elementy wyrażają się wzorem $a_{ij}^T = a_{ji}$.
Z definicji wynika, że macierz transponowana powstaje z macierzy wyjściowej poprzez zapisanie kolejno poszczególnych wierszy macierzy A jako kolejne kolumny macierzy A^T.
Przykład 3:
Dla macierzy $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$
macierz transponowana A^T jest postaci $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
Twierdzenie 1: Własności transpozycji
Zachodzą następujące własności:

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
2. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$;
3. $(A^T)^T = A$;
4. $(a^r)^T = (A^T)^r$;
5. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$,

gdzie $r \in \mathbb{N}$, α jest dowolną liczbą rzeczywistą lub zespoloną, zaś wymiary macierzy A i B dla poszczególnych własności są takie, aby rozważane działania były wykonalne.
Definicja 7: Macierz symetryczna i macierz antysymetryczna

1. Macierz kwadratową A nazywamy **symetryczną**, jeżeli jest równa swojej macierzy transponowanej, tj. zachodzi warunek $A = A^T$.
2. Macierz kwadratową A nazywamy **antysymetryczną**, jeżeli $A^T = -A$.

Z definicji wynika, że macierz kwadratowa jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy jej elementy leżące symetrycznie względem głównej przekątnej są sobie równe. Z kolei macierz kwadratowa jest antysymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy jej elementy leżące symetrycznie względem głównej przekątnej są liczbami wzajemnie przeciwnymi, zaś elementy na głównej przekątnej są równe 0.

Przykład 4:

Macierz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

jest symetryczna, z kolei macierz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

jest antysymetryczna.

3 Wyznacznik macierzy - definicja i własności

Definicja 1: Definicja wyznacznika Z każdą macierzą kwadratową A związana jest liczba (rzeczywista lub zespolona) nazywana **wyznacznikiem macierzy** A , oznaczana symbolem $\det A$. Wyznacznik definiujemy indukcyjnie, w następujący sposób:

1. jeżeli macierz $A = (a_{11})$ jest stopnia 1, to $\det A = a_{11}$;::

2. jeżeli macierz $A = (a_{ij})$ jest stopnia n, gdzie n¿1, to

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1},$$

gdzie A_{i1} oznacza podmacierz stopnia $n-1$ otrzymaną z macierzy A poprzez skreślenie i-tego wiersza oraz pierwszej kolumny.

Wyznacznik macierzy będziemy również oznaczać, stosując następujący zapis:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Warto zapamiętać, że wyznaczniki liczymy **tylko** dla macierzy kwadratowych.

Przykład 1:
Zgodnie z definicją, wyznacznikiem macierzy składającej się z jednego elementu jest wartość tego elementu, tj. $\det(7) = 7$ $|-27| = -27$.
Przykład 2:
Obliczmy wyznacznik macierzy stopnia 2. Niech zatem $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
Zgodnie z definicją obliczamy $\det A = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot 2 + (-1)^{2+1} \cdot 3 \cdot (-1) = 7$.
Przykład 3:
Zajmijmy się następnie obliczeniem wyznacznika macierzy stopnia 3. Mamy daną macierz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
Mamy: $\det A = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \det A_{11} + (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \det A_{21} + (-1)^{3+1} \cdot 3 \cdot A_{31}$.
Obliczamy: $\det A_{11} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -2$, $\det A_{21} = \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0$, $\det A_{31} = \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$,
skąd ostatecznie $\det A = (-1)^2 \cdot 2 \cdot (-2) + (-1)^3 \cdot (-1) \cdot 0 + (-1)^4 \cdot 3 \cdot 3 = -4 + 9 = 5$.
Twierdzenie 1: Własności wyznacznika macierzy Niech A będzie macierzą kwadratową.

1. Jeżeli macierz A zawiera wiersz (kolumnę) składającą się z samych zer, to $\det A = 0$;

2. Jeżeli zamienimy miejscami dwa wiersze (kolumny) macierzy A, to wyznacznik zmieni znak na przeciwny;

3. Jeżeli macierz A zawiera dwa jednakowe wiersze (kolumny), to $\det A = 0$;

4. Jeżeli do każdego z elementów pewnego wiersza (kolumny) macierzy A dodamy pomnożone przez tę samą liczbę odpowiednie elementy innego wiersza (kolumny) tej macierzy (tj. dodajemy elementy leżące w tych samych kolumnach (wierszach)), to wyznacznik macierzy A nie zmieni

się. Ogólnie, wyznacznik macierzy A nie zmieni się, jeżeli do pewnego wiersza (kolumny) tej macierzy dodamy kombinację liniową innych wierszy (kolumn) macierzy A;

5. Jeżeli wszystkie elementy pewnego wiersza (kolumny) macierzy A pomnożymy przez liczbę α, to wyznacznik otrzymanej macierzy będzie równy $\alpha \cdot \det A$;

6. Transpozycja macierzy A nie zmienia jej wyznacznika, tj. $\det A = \det A^T$;

7. Jeżeli macierze A i B są tych samych stopni, to

$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ (**prawo Cauchy'ego**).

Przykład 4:

Obliczmy wyznacznik macierzy $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Mamy: $\det A = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$,

skąd $\det A = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \dots$

i dalej analogicznie $\dots = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot (-1)^{3+3} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} =$ $(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot (-1)^{3+3} \cdot 3 \cdot (-1)^{4+4} \cdot 4 \cdot (-1)^{5+5} \cdot 5$,

skąd ostatecznie otrzymujemy $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$

Powyższy przykład ilustruje następujące

Twierdzenie 2: Wyznacznik macierzy trójkątnej Wyznacznik macierzy trójkątnej równy jest iloczynowi wyrazów leżących na głównej przekątnej. Jest to podstawowy fakt z teorii macierzy, wyznaczników i układów równań liniowych. Stanowi on podstawę dla tzw. metody Gaussa.

Wyznaczniki macierzy stopni 2 i 3

Obliczając wyznaczniki macierzy stopni 2 i 3 możemy, tak jak w przypadku wyznaczników wszystkich innych stopni, zastosować rozwiniecie Laplace'a względem dowolnie wybranego wiersza lub kolumny macierzy, jednak w przypadku tych dwóch szczególnych stopni istnieją prostsze metody obliczania wyznaczników.
Do obliczania wyznaczników macierzy stopnia 2 stosujemy regułę:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}.$$

Przykład 1:

Obliczymy wyznacznik: $\det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 1\cdot(-1)-(-2)\cdot 3 = -1-(-6) = -1+6 = 5.$

Do obliczania wyznaczników macierzy stopnia 3 stosuje się tzw. **metodę Sarrusa**, która polega na dopisaniu pod macierzą pierwszego i drugiego wiersza, a następnie obliczeniu sum iloczynów elementów wzdłuż linii kropkowanych i odjęciu sum iloczynów elementów wzdłuż linii ciągłych:
Trzeba przy tym zapamiętać, że metodę Sarrusa stosujemy **tylko** do obliczania wyznaczników macierzy stopnia 3.

Przykład 2: Obliczymy wyznacznik macierzy

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -i \\ 3 & -i & -1 \end{pmatrix}.$$

Zastosujemy omówioną wyżej metodę Sarrusa. Mamy:

$$\det A = \det\begin{pmatrix} i & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -i \\ 3 & -i & -1 \end{pmatrix} = (i\cdot 2\cdot(-1) + 0\cdot(-i)\cdot(-2) + 3\cdot 1\cdot(-i)) -$$
$$\begin{matrix} i & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -i \end{matrix}$$
$$-((-2)\cdot 2\cdot 3 + (-i)\cdot(-i)\cdot i + 0\cdot 1\cdot(-1)) = 12-4i.$$

Alternatywną wersją metody Sarrusa jest dopisanie do macierzy, której wyznacznik należy wyliczyć, zamiast pierwszego i drugiego wiersza, pierwszej i drugiej kolumny danej macierzy. Dalej metoda postępowania jest analogiczna.

Przykład 3:
Obliczymy wyznacznik macierzy

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Mamy:

$$\det B = \det \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & -6 \\ -1 & 0 \\ 1 & 5 \end{matrix} =$$

$= (2 \cdot 0 \cdot (-2) + (-6) \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot 5) - (3 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 5 + (-6) \cdot (-1) \cdot (-2)) =$
$= (-24 - 15) - (40 - 12) = -67.$

Definicja 1: Dopełnienie algebraiczne
Niech $A = (a_{ij})$ będzie macierzą kwadratową stopnia n, gdzie $n \geqslant 2$. Niech A_{ij} będzie podmacierzą stopnia $n-1$ powstałą z macierzy A poprzez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny. Liczbę $D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ nazywamy **dopełnieniem algebraicznym** elementu a_{ij} macierzy A.

Przykład 1:
Niech A będzie macierzą stopnia 3 postaci $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 13 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
Obliczymy dopełnienie algebraiczne elementu a_{23}. Skreślamy zatem drugi wiersz i trzecią kolumnę macierzy A, otrzymując macierz $A_{23} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Wyznacznik macierzy A_{23} jest równy -3, zatem dopełnienie algebraiczne elementu a_{23} wynosi $D_{23} = (-1)^{2+3} \cdot (-3) = 3$.

Twierdzenie 1: Rozwinięcia Laplace'a wyznacznika. Niech $A = (a_{ij})$ będzie macierzą stopnia n, gdzie $n \geqslant 2$.

1. Dla dowolnej, ustalonej liczby i, gdzie $1 \leqslant i \leqslant n$, wyznacznik macierzy A jest równy $\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} D_{ik}$. Powyższą równość nazywamy **rozwinięciem Laplace'a względem i-tego wiersza**.

2. Dla dowolnej, ustalonej liczby j, gdzie $1 \leqslant j \leqslant n$, wyznacznik macierzy A jest równy $\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} D_{kj}$. Powyższą równość nazywamy **rozwinięciem Laplace'a względem j-tej kolumny**.

Warto zwrócić uwagę, że zgodnie z powyższym twierdzeniem, wyznacznik macierzy jest równy rozwinięciu Laplace'a względem **dowolnie** wybranego wiersza bądź kolumny macierzy, podczas gdy definicja indukcyjna nakazuje wykonać rozwinięcie względem konkretnej (w tym przypadku pierwszej) kolumny macierzy.

Przykład 2:

Obliczymy wyznacznik macierzy $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Zauważmy, że w trzeciej kolumnie macierzy mamy dwa zera, zatem wygodnie będzie obliczać wyznacznik, wykorzystując rozwinięcie Laplace'a względem tej właśnie kolumny.

$$\det A = 0 \cdot D_{13} + 1 \cdot D_{23} + 0 \cdot D_{33} + 2 \cdot D_{43} = 0 + 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$0 + 2 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -(0 + 6 + 12 - (6 + 3 + 0)) - 2 \cdot (12 + 3 +$$

$$8 - (24 + 2 + 6)) = = -(18 - 9) - 2 \cdot (23 - 32) = -9 + 18 = 9.$$

Niejednokrotnie przy obliczaniu wyznacznika wygodnie jest daną macierz przekształcić, stosując operacje nie mające wpływu na jej wyznacznik .

Przykład 3: Obliczymy wyznacznik macierzy $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ -2 & 5 & -6 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Łatwo zauważyć, że mnożąc pierwszy wiersz przez -2, a następnie dodając go do drugiego wiersza, otrzymamy w drugim wierszu dwa zera, co znacznie uprości rachunki. Mamy zatem:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ -2 & 5 & -6 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_1 & \to & w_1 \\ w_2 & \to & w_2 - 2w_1 \\ w_3 & \to & w_3 \\ w_4 & \to & w_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ -2 & 5 & -6 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Stosujemy następnie rozwinięcie Laplace'a względem drugiego wiersza, otrzymując

$$\det A = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -6 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-5) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -5 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-6 - 4 + 27 -$$

$$(36 - 3 - 6)) - 5 \cdot (-5 - 8 + 9 - (30 - 6 - 2)) = 140.$$

Obliczanie wyznacznika za pomocą wolframalpha.com,

`https://www.wolframalpha.com/input/?i=det(%7B%7B1,-1,3,-2%7D,%7B2,`

-3,1,-4%7D,%7B-2,5,-6,3%7D,%7B3,2,-1,1%7D%7D)

4 Macierz odwrotna

Definicja 1: Macierz odwrotna Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n. Jeżeli istnieje macierz A^{-1} taka, że spełnione są warunki $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$,
to mówimy, że macierz A jest **odwracalna**, a macierz A^{-1} nazywamy **macierzą odwrotną** do A (lub **odwrotnością** A).
Warto zapamiętać, że macierz odwrotna może istnieć **tylko** dla macierzy kwadratowej, jednakże nie każda macierz kwadratowa ma swoją macierz odwrotną.
Wprost z definicji wynika również, że macierz odwrotna do macierzy kwadratowej stopnia n także jest macierzą kwadratową stopnia n.
Twierdzenie 1: O jedyności macierzy odwrotnej Dowolna macierz kwadratowa może mieć co najwyżej jedną macierz odwrotną, tj. jeżeli dla danej macierzy istnieje macierz odwrotna, to jest ona określona jednoznacznie.
Twierdzenie 2: Własności macierzy odwrotnej Niech A i Bbędą macierzami odwracalnymi tego samego stopnia i niech α będzie liczbą różną od zera. Wówczas macierze (A^{-1}, A^T, $A \cdot B$, $\alpha \cdot A$ są również odwracalne oraz zachodzą następujące własności:

1. $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$;
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
3. $(A^{-1})^{-1} = A$;
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;
5. $(\alpha \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}$.

Definicja 2: Macierz osobliwa i nieosobliwa Macierz kwadratową A taką, że $\det A \neq 0$ nazywamy macierzą **nieosobliwą**. W przeciwnym wypadku A nazywamy macierzą **osobliwą**.

Twierdzenie 3: O odwracalności macierzy Macierz kwadratowa jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa.
Podamy teraz ogólny wzór na postać macierzy odwrotnej. W tym celu, w pierwszej kolejności sformułujemy pojęcia dopełnienia algebraicznego elementu macierzy oraz macierzy dopełnień algebraicznych.

Definicja 3: Dopełnienie algebraiczne elementu macierzy Niech $A = (a_{ij})$ będzie macierzą stopnia n, gdzie $n \geqslant 2$. Niech A_{ij} będzie podmacierzą powstałą z A poprzez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny. Liczbę $D_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$
nazywamy **dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy A.**
Przykład 2:

Rozważmy macierz A postaci $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Wyliczymy dopełnienie algebraiczne elementu a_{11}. Skreślając z macierzy A wiersz o numerze $i = 1$ i kolumnę o numerze $j = 1$ otrzymujemy podmacierz

$$A_{11} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

której wyznacznik $\det A_{11}$ jest równy -10. Zatem dopełnieniem algebraicznym elementu a_{11} jest $D_{11} = (-1)^{1+1}\det A_{11} = -10$.

Definicja 4: Macierz dopełnień algebraicznych
Macierz

$$A^D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{pmatrix},$$

gdzie D_{ij} oznaczają dopełnienia algebraiczne elementów a_{ij} macierzy A, nazywamy **macierzą dopełnień algebraicznych macierzy** A.

Twierdzenie 4: Postać macierzy odwrotnej Jeżeli macierz $A = (a_{ij})$ stopnia n jest nieosobliwa (jest odwracalna), to macierz do niej odwrotna A^{-1} wyraża się wzorem $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A^D)^T$.

Przykład 3: Wyliczymy macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Wyznacznik macierzy A jest równy -12, zatem na mocy twierdzenia O odwracalności macierzy, macierz odwrotna do macierzy A istnieje. Obliczamy macierz dopełnień macierzy A:

$$A^D = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix},$$

skąd, po wykonaniu rachunków, mamy:

$A^D = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -9 & -3 & 0 \\ -5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.
Aby wyliczyć macierz A^{-1} odwrotną do macierzy A musimy teraz transponować macierz dopełnień. Mamy: $(A^D)^T = \begin{pmatrix} 6 & -9 & -5 \\ 6 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
Na koniec $(A^D)^T$ dzielimy przez wyznacznik (równy -12), otrzymując
$A^{-1} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 & -9 & -5 \\ 6 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
Jeśli chcemy się upewnić, czy nie nie ma błędu w naszych stosunkowo żmudnych obliczeniach, możemy je sprawdzić, korzystając z przynajmniej jednego warunku definicji macierzy odwrotnej. I tak:
$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{12}\right) \begin{pmatrix} 6 & -9 & -5 \\ 6 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Podobnie można sprawdzić, że również $A^{-1} \cdot A = I$, a zatem nasze obliczenia są poprawne.
Obliczanie macierzy odwrotnej za pomocą wolframalpha.com,
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=inverse(%7B%7B1,-1,3,-2%7D,%7B2,-3,1,-4%7D,%7B-2,5,-6,3%7D,%7B3,2,-1,1%7D%7D)`

5 Rząd macierzy

Definicja 1: Minor macierzy Niech A będzie dowolną macierzą wymiaru $m \times n$ i niech k będzie liczbą naturalną mniejszą lub równą od mniejszej z liczb m, n. **Minorem** stopnia k macierzy A nazywamy wyznacznik utworzony z elementów tej macierzy stojących na przecięciu dowolnie wybranych k wierszy i k kolumn.

Przykład 1: Niech macierz A będzie postaci $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
Każdy z elementów macierzy A jest jej minorem stopnia 1. Obliczymy przykładowy minor stopnia 2 macierzy A. Wybieramy zatem dwa dowolne wiersze i dwie dowolne kolumny, niech będą to wiersze o numerach 1 i 3 oraz kolumny o numerach 2 i 4, a następnie obliczamy wyznacznik utworzony z elementów stojących na przecięciach wybranych wierszy i kolumn. W naszym przypadku

będzie to wyznacznik $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 16 = -12.$

Zauważmy, że chcąc obliczyć minor stopnia 4, do utworzenia go musimy wykorzystać wszystkie cztery wiersze i cztery kolumny macierzy A. Wobec tego jedynym minorem stopnia 4 naszej macierzy jest jej wyznacznik $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -36.$

Warto zauważyć, że dowolna macierz kwadratowa stopnia n ma dokładnie jeden minor stopnia n. Jest nim mianowicie jej wyznacznik.

Przykład 2: Rozważmy macierz A postaci $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}.$

Każda z liczb $\det(a_{ij})$ jest minorem stopnia 1, zatem rozważana macierz A ma ich 8. Minorami stopnia 2 są:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}.$$

Ponieważ macierz A jest wymiaru 4×2 więc nie może mieć minorów stopnia większego od 2.

Definicja 2: Rząd macierzy

Rzędem dowolnej macierzy A nazywamy taką liczbę naturalną r, że z macierzy A można wybrać przynajmniej jeden niezerowy minor stopnia r, natomiast wszystkie minory stopni większych od r, jeśli takie istnieją, są równe zero.

Rząd macierzy A oznaczamy symbolem $\mathrm{rz}(A)$ lub $\mathrm{rank}(A)$. Warto zanotować, że dla dowolnej niezerowej macierzy A zachodzi $\mathrm{rz}(A) \geqslant 1$. Wynika to z faktu, że każdy niezerowy element macierzy A jest jednocześnie jej minorem stopnia 1. Z kolei dla macierzy zerowej dowolnego wymiaru przyjmujemy, że jej rząd jest równy zero.

Przykład 3: Wyznaczmy rząd macierzy $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 11 \end{pmatrix}.$

Ponieważ macierz A jest wymiaru 3×3, zatem jej rząd jest co najwyżej równy 3. Ponadto, skoro jest to macierz kwadratowa, to jedynym minorem stopnia 3 jest jej wyznacznik. Obliczamy zatem: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 0,$

wobec czego $\mathrm{rz}(A) < 3$. Szukamy następnie niezerowego minora stopnia 2.

Takim minorem jest na przykład $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10.$

Rząd macierzy A jest wobec tego równy 2.

Twierdzenie 1: Własności rzędu macierzy

1. Jeżeli A jest macierzą kwadratową nieosobliwą (tj. $\det A \neq 0$), to rząd A jest równy jej stopniowi; w szczególności $\text{rz}(A^{-1}) = \text{rz}(A)$;
2. Dla dowolnej macierzy A zachodzi $\text{rz}(A^T) = \text{rz}(A)$.

Definicja 3: Przekształcenia elementarne Niech A będzie dowolną macierzą. **Przekształceniami elementarnymi** nazywamy następujące operacje na macierzy A:

1. Przestawienie dwóch wierszy (kolumn);
2. Pomnożenie wiersza (kolumny) przez stałą różną od zera;
3. Dodanie do wiersza (kolumny) innych wierszy (kolumn) pomnożonych przez dowolne stałe.

Twierdzenie 2: Przekształcenia elementarne nie zmieniają rzędu macierzy.
Wykonując przekształcenia elementarne macierzy będziemy używać pewnych specjalnych oznaczeń. Mianowicie zapis $w_i \to \alpha \cdot w_{i+1}$
będzie oznaczać, że po przekształceniu w miejsce wiersza w_i wpiszemy wiersz w_{i+1} pomnożony przez α. Analogicznie, zapis $k_j \to \alpha \cdot k_l + \beta \cdot k_m$
będzie oznaczał, że w miejsce kolumny k_j wpiszemy $\alpha \cdot k_l + \beta \cdot k_m$. Przykładowe przekształcenie może wyglądać następująco:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \to \left| \begin{array}{lll} w_1 & \to & 2 \cdot w_3 \\ w_2 & \to & w_2 \\ w_3 & \to & w_2 - w_1 \end{array} \right. \to \begin{pmatrix} 2 \cdot a_{31} & 2 \cdot a_{32} & 2 \cdot a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} - a_{11} & a_{22} - a_{12} & a_{23} - a_{13} \end{pmatrix}.$$

Definicja 4: Macierz schodkowa Macierzą schodkową (lub **uogólnioną macierzą trójkątną**) nazywamy taką macierz, w której pierwsze niezerowe elementy w kolejnych niezerowych wierszach znajdują się w kolumnach o rosnących numerach tj. jeżeli $a_{ij} \neq 0$ i dla każdego $k < j$ $a_{ik} = 0$, to $a_{(i+1)s} = 0$ dla $s \leqslant j$.

Przykład 4: Przyjrzyjmy się macierzom:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Macierze A i B sa macierzami schodkowymi, natomiast w macierzy C w kolejnych trzecim i czwartym wierszu pierwsze niezerowe elementy leżą w kolumnie o tym samym numerze, zatem macierz C nie jest macierzą schodkową.

Twierdzenie 3: Rząd macierzy schodkowej Rząd macierzy schodkowej jest równy liczbie jej niezerowych wierszy (czyli liczbie schodków).

Przykład 5: Wyznaczmy rząd macierzy $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Przekształcamy macierz do postaci schodkowej:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left| \begin{array}{lcl} w_1 & \rightarrow & w_3 \\ w_2 & \rightarrow & w_2 \\ w_3 & \rightarrow & w_1 \\ w_4 & \rightarrow & w_4 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left| \begin{array}{lcl} w_1 & \rightarrow & w_1 \\ w_2 & \rightarrow & w_2 - 3w_1 \\ w_3 & \rightarrow & w_3 - 4w_1 \\ w_4 & \rightarrow & w_4 - 2w_1 \end{array} \right. \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 14 & -10 \\ 0 & 9 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \left| \begin{array}{lcl} w_1 & \rightarrow & w_1 \\ w_2 & \rightarrow & w_2 \\ w_3 & \rightarrow & w_3 - 2w_2 \\ w_4 & \rightarrow & 7w_4 - 9w_2 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ zamiana wierszy nie wpływa na rząd macierzy, zatem otrzymaną macierz możemy zapisać jako

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobec czego rząd macierzy A jest równy 3.

Obliczanie macierzy odwrotnej za pomocą wolframalpha.com,
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=rank%7B%7B4,6,2%7D,%7B3,1,4%7D,%7B1,-2,3%7D,%7B2,-5,1%7D%7D`

6 Układy równań liniowych

Definicja 1: Układ równań liniowych Układ równań postaci:

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. \tag{1}$$

nazywamy **układem** m **równań liniowych o** n **niewiadomych** $x_1, \ldots, x_n$. Liczby rzeczywiste (lub zespolone) a_{ij} oraz b_i nazywamy **współczynnikami układu**.

Definicja 2: Układ równań jednorodny

Układ równań liniowych, dla którego $b_i = 0$, dla $i = 1, \ldots, m$, nazywamy **układem jednorodnym**.
Układ równań, który nie jest układem jednorodnym nazywamy **układem niejednorodnym**.
Zapis macierzowy układu równań liniowych
Z układem równań liniowych można powiązać macierz wymiaru $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

nazywaną **macierzą współczynników układu równań**, oraz dwie macierze kolumnowe (które, dla ułatwienia, nazywać będziemy wektorami):

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix};$$

wektor x nazywany **wektorem niewiadomych**, wektor b to tzw. **wektor prawej strony**. Przy przyjętych oznaczeniach, układ równań możemy zapisać w postaci macierzowej: $Ax = b$.
Twierdzenie Cramera
W przypadku, gdy liczba równań układu jest równa liczbie niewiadomych, macierz układu jest macierzą kwadratową. Jeżeli dodatkowo jest to macierz nieosobliwa (czyli kwadratowa o wyznaczniku różnym od zera), wówczas układ równań nazywamy **układem Cramera**. Rozwiązanie równania macierzowego - a więc i układu - można wówczas wyznaczyć wykorzystując odwrotność macierzy układu.
Twierdzenie 1: Rozwiązanie układu Cramera. Jeżeli macierz A jest kwadratowa i nieosobliwa, to równanie $Ax = b$ posiada dokładnie jedno rozwiązanie; rozwiązaniem tym jest $x = A^{-1}b$.
Uwaga 1: Rozwiązanie zerowe $(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$ jest rozwiązaniem każdego układu jednorodnego. Jeżeli jednorodny układ równań liniowych jest układem Cramera, to rozwiązanie zerowe $(0, \ldots, 0)$ jest jego jedynym rozwiązaniem.
Przykład 1: Rozwiązywanie układu równań liniowych metodą macierzy odwrotnej
Dla układu równań

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=0 \\ x-y+2z=2 \end{cases}$$

mamy

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad b=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ $\det A=-3$, zatem rozważany układ równań jest układem Cramera. Łatwo sprawdzić, że

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

stąd, na podstawie twierdzenia Cramera, otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 2 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Oznacza to, że rozwiązaniem układu równań jest $x=\frac{2}{3}$, $y=2$, $z=\frac{5}{3}$.
Metoda rozwiązywania układu równań liniowych oparta na twierdzeniu Cramera wymaga znajomości (lub wyznaczenia) macierzy odwrotnej układu. To praktycznie dyskwalifikuje tę metodę, gdyż w przypadku ogólnym nie istnieje algorytm dobrze radzący sobie z zadaniem odwracania macierzy. Stąd potrzeba metody rozwiązywania układów równań liniowych nie wymagającej znajomości macierzy odwrotnej. Jedna z takich metod oparta jest na tzw. wzorach Cramera.

Twierdzenie 2: Wzory Cramera. Jeżeli macierz A układu równań jest kwadratowa i nieosobliwa, to jedyne rozwiązanie $(x_1,\dots,x_n)$ tego układu wyraża się wzorem:

$$x_i=\frac{\det A_i}{\det A} \qquad (i=1,\dots,n),$$

w którym macierz A_i oznacza macierz powstałą z macierzy A przez zastąpienie jej i-tej kolumny wektorem b.

Przykład 2: Wzory Cramera

Dla układu równań rozważanego w przykładzie mamy

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Na podstawie wzorów Cramera otrzymujemy:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = 2, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{5}{3}.$$

Przedstawiona w przykładzie metoda rozwiązywania układu równań liniowych oparta na wzorach Cramera nie wykorzystuje macierzy odwrotnej układu. W przypadku układów n równań liniowych o n niewiadomych wymaga ona obliczenia $n+1$ wyznaczników macierzy stopnia n.

Twierdzenie 3: Kroneckera-Capelliego

Rozważmy układ równań liniowych postaci (1). Niech U będzie macierzą o wymiarze $m \times (n+1)$ powstałą z macierzy A wymiaru $m \times n$ układu przez dołączenie do macierzy A dodatkowej kolumny - wektora prawej strony b, tj.

$$U = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Tak utworzoną macierz U nazywamy **macierzą uzupełnioną układu**.

Układ równań (1) posiada rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rzędy macierzy A oraz U są równe, tj.

$$\operatorname{rz} A = \operatorname{rz} U.$$

Ponadto:

- jeżeli $\operatorname{rz} A = \operatorname{rz} U = n$ (n - liczba niewiadomych), to rozwiązanie to jest jedyne;
- jeżeli $\operatorname{rz} A = \operatorname{rz} U = r < n$, to rozwiązań jest nieskończenie wiele i zależą one od $n - r$ parametrów.

Z twierdzenia Kroneckera-Capelliego wynika, że dla każdego układu równań liniowych zachodzi jedna z trzech możliwości:

- nie posiada rozwiązań, układ taki nazywamy **układem sprzecznym**;
- posiada jedno rozwiązanie, układ taki nazywamy **układem oznaczonym** ;
- posiada nieskończenie wiele rozwiązań, układ taki nazywamy **układem nieoznaczonym**.

Przykład 3: Układ sprzeczny
Rozważmy układ równań:

$$\begin{cases} x+y+z+w=1 \\ 2x-y+2z-w=-1 \\ x-2y+z-2w=2 \end{cases}.$$

Liczba niewiadomych to $n=4$; macierz uzupełniona ma postać

$$U=(A|b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Ponieważ wszystkie minory stopnia trzeciego macierzy A są zerowe:
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$
oraz
$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, zatem
$\operatorname{rz} A = 2$. Ponadto, ponieważ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$, to $\operatorname{rz} U = 3$. Oznacza to, na podstawie twierdzenia Kroneckera - Capelliego, że rozważany układ równań jest sprzeczny (gdyż $\operatorname{rz} A \neq \operatorname{rz} U$).

Przykład 4: Rozwiązywanie układu oznaczonego
Rozważmy układ czterech równań liniowych z trzema niewiadomymi

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ -2x-y-z=1 \\ 2x-y=2 \\ -x-y-2z=2 \end{cases}.$$

Liczba kolumn macierzy układu (równa liczbie niewiadomych) wynosi $n=3$; macierz uzupełniona ma postać

$$U=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right).$$

Jak łatwo sprawdzić $\det U = 0$, zatem $\operatorname{rz} U \leqslant 3$, gdyż macierz U nie zawiera żadnej nieosobliwej podmacierzy wymiaru 4×4. Ponieważ w macierzy A istnieje nieosobliwa podmacierz wymiaru 3×3:

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 5$, zatem $\operatorname{rz} A = \operatorname{rz} U = 3$. Z twierdzenia Kroneckera-Capelliego wynika więc, że rozważany układ równań jest układem oznaczonym. Aby znaleźć jego rozwiązanie wystarczy rozwiązać równoważny wyjściowemu układ Cramera, powstały z wyjściowego układu przez odrzucenie czwartego równania (równanie to odpowiada temu wierszowi macierzy A, który nie występuje w nieosobliwej podmacierzy decydującej o równości rzędów macierzy A oraz U): $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -2x - y - z = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$. Na podstawie wzorów Cramera otrzymujemy

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{5} = \frac{2}{5}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{5} = -\frac{6}{5}$, $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{5} = -\frac{3}{5}$.

Przykład 5: Rozwiązywanie układu nieoznaczonego

Rozważmy układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}$$

Liczba niewiadomych to $n = 3$, macierz uzupełniona ma postać

$U = (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right)$.

Druga i czwarta kolumna macierzy U są identyczne, zatem $\operatorname{rz} A = \operatorname{rz} U$. Z postaci macierzy A wynika z kolei, że $\operatorname{rz} A \leqslant 2$ (pierwsza i trzecia kolumna macierzy A są identyczne, więc $\det(A) = 0$). Ponieważ jednak macierz A zawiera nieosobliwą podmacierz wymiaru 2×2: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, zatem $\operatorname{rz} A = \operatorname{rz} U = 2$. Z twierdzenia Kroneckera-Capelliego wynika więc, że rozważany układ równań posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - \operatorname{rz} A = 3 - 2 = 1$ parametru. Wyznaczymy te rozwiązania. Skoro $\operatorname{rz} A = 2$ to, na podstawie definicji rzędu macierzy, macierz A zawiera nieosobliwą podmacierz wymiaru 2×2; odnajdujemy tę macierz w rozwiązywanym układzie równań. Równania, których współczynniki nie wchodzą w skład tej macierzy odrzucamy, z kolei niewiadome, których wybrana podmacierz nie obejmuje, przerzucamy na drugą stronę równania i traktujemy jako parametry. Układ równań, jaki w ten sposób otrzymujemy, jest układem Cramera

(sposób wyboru macierzy tego układu gwarantuje, że jej wyznacznik jest różny od zera) - do jego rozwiązania stosujemy wzory. W naszym przypadku, jako nieosobliwą podmacierz wymiaru 2×2 zawartą w macierzy A możemy wybrać macierz
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
Oznacza to, że układy równań
$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+2z=-1 \\ x-2y+z=-2 \end{cases}$ oraz $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+2z=-1 \end{cases}$
są równoważne. Traktując niewiadomą z jako parametr, otrzymujemy do rozwiązania układ Cramera
$\begin{cases} x+y=1-z \\ 2x-y=-1-2z \end{cases}$. Zastosowanie do tego ostatniego układu wzorów prowadzi do rozwiązania:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ -1-2z & -1 \end{vmatrix}}{-3} = -z, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 2 & -1-2z \end{vmatrix}}{-3} = 1, \quad z \in \mathbb{R},$$

które można również zapisać jako
$\begin{cases} x=-t \\ y=1 \\ z=t \end{cases}$, gdzie $t \in \mathbb{R}$.
Podam teraz kolejno jak rozwiązuje sie układy równań z przykładów 1, 3, 4 i 5 za pomocą wolframalpha.com,
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=solve(%7Bx%2By-z%3D1,2*x%2By-2*z%3D0,x-y%2B2*z%3D2%7D,%7Bx,y,z%7D)`
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=solve(%7Bx%2By%2Bz%2Bw%3D1,2*x-y%2B2*z-w%3D-1,x-2*y%2Bz-2*w%3D2%7D,%7Bx,y,z,w%7D)`
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=solve(%7Bx-y%2Bz%3D1,-2*x-y-z%3D1,2*x-y%3D2,-x-y-2*z%3D2%7D,%7Bx,y,z%7D)`
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=solve(%7Bx%2By%2Bz%3D1,2*x-y%2B2*z%3D-1,x-2*y%2Bz%3D-2%7D,%7Bx,y,z%7D)`

7 Metoda eliminacji Gaussa

Przedstawiony poniżej sposób rozwiązywania układów równań liniowych jest pewnym uproszczeniem algorytmu zwanego metodą eliminacji Gaussa. Metoda ta, niezwykle efektywna pod względem numerycznym (nie istnieje algorytm rozwiązywania układów równań wymagający istotnie mniejszej liczby działań niż metoda eliminacji Gaussa), polega na sprowadzeniu macierzy uzupełnionej, odpowiadającej rozwiązywanemu układowi równań, do uogólnionej postaci trójkątnej (nazywanej również postacią schodkową). Aby osiągnąć ten efekt, na macierzy uzupełnionej wykonujemy dwa rodzaje operacji:

- dodajemy do wybranego wiersza sumy pozostałych wierszy pomnożonych przez odpowiednio dobrane stałe;
- zamieniamy kolejność wierszy.

Operacje te nie wpływają na rozwiązania układu, nie zmieniają też rzędu macierzy. Do uzyskanej po zastosowaniu tych operacji macierzy stosujemy twierdzenie Kroneckera-Capelliego.
Warto przypomnieć w tym miejscu, że pierwsza z wymienionych powyżej operacji nie zmienia wartości wyznacznika macierzy, druga może zmienić jedynie jego znak. W efekcie, metoda eliminacji Gaussa może być z powodzeniem stosowana zarówno do obliczania rzędu i wyznacznika macierzy, jak i do wyznaczania macierzy odwrotnej.

Rozwiązywanie układów równań liniowych metodą eliminacji Gaussa

Ideę metody eliminacji Gaussa wyjaśnimy na kilku przykładach.

Przykład 1: Rozwiązywanie układu oznaczonego metodą eliminacji Gaussa

Celem naszym jest rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} 2x + y + z + w = 0 \\ -x - 2y - z + w = 1 \\ x + y - 2z - 3w = 2 \\ 4x - 2y + 4w = 2 \end{cases}$$

przy użyciu metody eliminacji Gaussa. Macierz uzupełniona U rozważanego układu ma postać

$$U = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right).$$

W pierwszym kroku metody eliminacji Gaussa wykorzystujemy pierwszy wiersz, nazywany **wierszem głównym dla pierwszego kroku**. Liczbę 2, pierwszy niezerowy element wiersza głównego, nazywamy **elementem głównym dla pierwszego kroku**. Celem naszym jest wyzerowanie wszystkich elementów stojących pod liczbą 2(tj. pod elementem głównym dla pierwszego kroku) i utworzenie w ten sposób pierwszego schodka macierzy. Aby to osiągnąć, postępujemy w sposób następujący: do drugiego wiersza dodajemy pierwszy pomnożony przez ($\frac{1}{2}$ do trzeciego pomnożony przez ($-\frac{1}{2}$ do czwartego pomnożony przez -2. Otrzymujemy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right) \to \left|\begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 + \frac{1}{2}w_1 \\ w_3 \to w_3 - \frac{1}{2}w_1 \\ w_4 \to w_4 - 2w_1 \end{array}\right. \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

W kolejnym kroku, wierszem głównym jest wiersz drugi nazywany **wierszem głównym dla drugiego kroku**; elementem głównym dla drugiego kroku jest $-\frac{3}{2}$. Celem naszym jest wyzerowanie wszystkich współczynników stojących pod liczbą $-\frac{3}{2}$(tj. pod elementem głównym dla drugiego kroku) i utworzenie w ten sposób drugiego schodka. Postępujemy analogicznie jak w kroku pierwszym: do wiersza trzeciego dodajemy wiersz drugi pomnożony przez $\frac{1}{3}$ do wiersza czwartego pomnożony przez $-\frac{8}{3}$. Otrzymujemy:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left|\begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 \\ w_3 \to w_3 + \frac{1}{3}w_2 \\ w_4 \to w_4 - \frac{8}{3}w_2 \end{array}\right. \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -3 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -2 & -\frac{2}{3} \end{array}\right).$$

W ostatnim, trzecim kroku wierszem głównym jest wiersz trzeci - **wiersz główny dla kroku trzeciego**; elementem głównym jest $-\frac{8}{3}$. Mnożąc trzeci wiersz przez $-\frac{1}{4}$ i dodając do wiersza czwartego otrzymujemy:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -3 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -2 & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \to \left|\begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 \\ w_3 \to w_3 \\ w_4 \to w_4 - \frac{1}{4}w_3 \end{array}\right. \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -3 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \end{array}\right).$$

Uzyskana w ten sposób macierz schodkowa jest macierzą uzupełnioną układu równań posiadającego te same rozwiązania, co wyjściowy układ:

$$\begin{cases} 2x + y + z + w = 0 \\ -\frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z + \frac{3}{2}w = 1 \\ -\frac{8}{3}z - 3w = \frac{7}{3} \\ -\frac{5}{4}w = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Z postaci macierzy widać również, że układ ten posiada dokładnie jedno rozwiązanie (macierz układu, jako macierz trójkątna górna o niezerowych elementach na głównej przekątnej, jest macierzą nieosobliwą) . Wyznaczymy je rozwiązując otrzymany układ równań w kolejności od ostatniego równania do pierwszego. Uzyskujemy kolejno: $w = 1$, $z = -2$, $y = 1, x = 0$. Warto zanotować, że operacje jakie wykonywaliśmy na macierzy wyjściowego układu równań, aby sprowadzić ją do postaci trójkątnej nie zmieniły jej wyznacznika. Ponieważ wyznacznik macierzy trójkątnej równy jest iloczynowi wyrazów z głównej przekątnej, mamy

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} \end{vmatrix} = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = -10.$$

Przykład 2: Rozwiązywanie układu nieoznaczonego metodą eliminacji Gaussa

Rozważmy układ równań

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 6 \\ -4x + 2z = 0 \\ 2y - 2z = 4 \end{cases} \tag{3}$$

Macierz uzupełniona tego układu ma postać

$$U = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right) \tag{4}$$

W pierwszym kroku metody eliminacji Gaussa do wiersza drugiego dodajemy wiersz pierwszy pomnożony przez 2; wiersz trzeci natomiast przepisujemy bez zmian:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right) \to \left| \begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 + 2w_1 \\ w_3 \to w_3 \end{array} \right. \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 12 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right) \tag{5}$$

W kroku drugim, do wiersza trzeciego dodajemy wiersz drugi pomnożony przez $-\frac{1}{3}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 12 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right) \to \left|\begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 \\ w_3 \to w_3 - \frac{1}{3}w_2 \end{array}\right. \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wykonywane operacje nie zmieniły rzędu macierzy, zatem

(6)
$$\mathrm{rz}(A) = \mathrm{rz}(U) = \mathrm{rz}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right) = \mathrm{rz}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \mathrm{rz}\left(\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{array}\right) = 2.$$

Na podstawie twierdzenia Kroneckera-Capelliego, rozważany układ równań posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r = 3 - \mathrm{rz}(A) = 3 - 2 = 1$ parametru. Jest on równoważny układowi

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y - 4z = 6 \\ 6y - 6z = 12 \end{array}\right., \tag{7}$$

którego rozwiązania, równe rozwiązaniom wyjściowego układu, mają postać $x = t, y = 2 + 2t, z = 2t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$ jest dowolnym parametrem.

Przykład 3: Rozwiązywanie układu sprzecznego metodą eliminacji Gaussa

Rozważmy układ równań

$$\left\{\begin{array}{r} 5x - 2y - z = 1 \\ -2x + 2y - 2z = 2 \\ -x - 2y + 5z = 1 \end{array}\right., \tag{8}$$

którego macierz uzupełniona U ma postać

$$U = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 5 & 1 \end{array}\right). \tag{9}$$

W pierwszym kroku metody eliminacji Gaussa do wiersza drugiego dodajemy wiersz pierwszy pomnożony przez $\frac{2}{5}$; do wiersza trzeciego pomnożony przez $\frac{1}{5}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 5 & 1 \end{array}\right) \to \left|\begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 + \frac{2}{5}w_1 \\ w_3 \to w_3 + \frac{1}{5}w_1 \end{array}\right. \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{6}{5} & -\frac{12}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & -\frac{12}{5} & \frac{24}{5} & \frac{6}{5} \end{array}\right).$$

W drugim kroku do wiersza trzeciego dodajemy wiersz drugi pomnożony przez 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{6}{5} & -\frac{12}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & -\frac{12}{5} & \frac{24}{5} & \frac{6}{5} \end{array}\right) \rightarrow \left| \begin{array}{l} w_1 \rightarrow w_1 \\ w_2 \rightarrow w_2 \\ w_3 \rightarrow w_3 + 2w_2 \end{array} \right. \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{6}{5} & -\frac{12}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right).$$

Wykonane operacje nie zminiły rzędu macierzy, zatem (10)
(10)

$$\operatorname{rz}(A) = \operatorname{rz}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \operatorname{rz}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 0 & \frac{6}{5} & -\frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rz}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & \frac{6}{5} \end{pmatrix} = 2$$

oraz
(11)

$$\operatorname{rz}(U) = \operatorname{rz}\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 5 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{6}{5} & -\frac{12}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right) = 3.$$

Na podstawie twierdzenia Kroneckera-Capelliego stwierdzamy, że rozważany układ równań nie posiada rozwiązań. Warto zauważyć, że sprzeczność tego układu można odczytać nie tylko z przeprowadzonego rachunku rzędów, lecz również z postaci macierzy schodkowej - wiersz trzeci tej macierzy odpowiada równaniu sprzecznemu $0x + 0y + 0z = 6$.
Podam teraz kolejno jak rozwiązuje sie układy równań z przykładów 1, 2, i 3 za pomocą wolframalpha.com,
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=solve(%7B2*x%2By%2Bz%2Bw%3D0,-x-2*y-z%2Bw%3D1,x%2By-2*z-3*w%3D2,4*x-2*y%2B4*w%3D2%7D,%7Bx,y,z,w%7D)`
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=solve(%7B2*x%2B3*y-4*z%3D6,-4*x%2B2*z%3D0,2*y-2*z%3D4%7D,%7Bx,y,z%7D)`
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=solve(%7B5*x-2*y-z%3D1,-2*x%2B2*y-2*z%3D2,-x-2*y%2B5*z%3D4%7D,%7Bx,y,z%7D)`

8 Wartości i wektory własne – definicje i metoda wyznaczania

Definicja 1: Wartości i wektory własne macierzy kwadratowych
Liczbę zespoloną λ nazywamy **wartością własną macierzy kwadratowej** A, jeżeli istnieje niezerowy wektor v taki, że

(1) $$Av = \lambda v.$$

Każdy niezerowy wektor v spełniający równanie (1) nazywamy **wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej λ.**

Twierdzenie 1: Niech A będzie macierzą kwadratową. Następujące warunki są równoważne:

(a) λ jest wartością własną macierzy A;

(b) równanie $(A - \lambda I) \cdot v = \mathbf{0}$, w którym $\mathbf{0}$ oznacza wektor zerowy, posiada niezerowe rozwiązanie v

(c) $\det (A - \lambda I) = 0$.

Definicja 2: Wielomian charakterystyczny macierzy

Jeżeli macierz A jest macierzą kwadratową wymiaru $n \times n$, to funkcja $\varphi_A (\lambda) = \det (A - \lambda I)$

jest wielomianem stopnia n; jest to tzw. **wielomian charakterystyczny macierzy A.**

Warunek (c) twierdzenia 1 pozwala wnioskować, że pierwiastki wielomianu φ_A to wartości własne macierzy A. Każda macierz kwadratowa wymiaru $n \times n$ posiada zatem n wartości własnych (liczonych z krotnościami). Oznaczając te wartości własne jako $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, wielomian charakterystyczny φ_A przyjmuje postać

$$\varphi_A(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = a_n (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n),$$

w której, co wynika z twierdzenia 1, $a_n = (-1)^n$ oraz $a_0 = \det(A)$.

Przykład 1: Wyznaczanie wielomianu charakterystycznego macierzy

Dla macierzy $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ postaci

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

mamy

$$\varphi_A (\lambda) = \det (A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -2 & -2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2.$$

Z kolei, dla macierzy $B \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 + 2i & i \\ -2 + i & 2 - i \end{pmatrix}$$

mamy

$$\varphi_B (\lambda) = \det (B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 + 2i - \lambda & i \\ -2 + i & 2 - i - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (3 + i) \lambda + 5 + 5i.$$

Przykład 2: Wyznaczanie wartości i wektorów własnych macierzy Wielomian charakterystyczny macierzy A rozważanej w przykładzie 1 wielomian charakterystyczny ma postać

$$\varphi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2.$$

Poszukamy pierwiastków tego wielomianu. Ponieważ

$$\varphi_A(\lambda) = -\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2 = -\lambda^2(\lambda-2)+\lambda-2 = -(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1),$$

zatem $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$ to trzy rzeczywiste wartości własne macierzy A. Dla każdej z tych wartości własnych wyznaczymy teraz odpowiadający jej wektor własny. Dla $\lambda_1 = -1$ wektor własny $v_{\lambda_1} = (x, y, z)^T$ wyznaczymy rozwiązując, równanie

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Równanie to równoważne jest układowi równań

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 3y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases},$$

którego rozwiązanie ma postać $(x, y, z) = (0, 0, t)$, gdzie $t \in \mathbb{R}$. Przyjmując za t dowolną niezerową wartość rzeczywistą (wektor zerowy nie może być wektorem własnym), otrzymujemy wektor własny odpowiadający wartości własnej $\lambda_1 = -1$, np. $v_{\lambda_1} = (0, 0, 1)^T$. Dla $\lambda_2 = 1$ wektor własny $v_{\lambda_2} = (x, y, z)^T$ wyznaczymy rozwiązując równanie

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

które równoważne jest układowi równań

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ y = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}.$$

Jego rozwiązanie ma postać $(x, y, z) = (t, 0, -t)$, gdzie $t \in \mathbb{R}$. Poszukiwanym wektorem własnym może więc być wektor $v_{\lambda_2} = (1, 0, -1)^T$. Dla $\lambda_3 = 2$ wektor własny $v_{\lambda_3} = (x, y, z)^T$ wyznaczymy z równania

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Po prostych rachunkach otrzymujemy $(x, y, z) = (2t, t, -2t)$, $t \in \mathbb{R}$. Poszukiwany wektor własny odpowiadający wartości własnej $\lambda_3 = 2$ może więc być wybrany jako $v_{\lambda_3} = (2, 1, -2)^T$.
Program "wolframalpha" posiada mozliwość wyliczenia:
wielomianu charakterystycznego macierzy A - characteristic polynomial(A)
wartości własnych macierzy A - eigenvalues(A)
wektorów własnych macierzy A - eigenvectors(A)
wartości własnych i odpowiadajacym im wektorów własnych macierzy A - eigensystem(A)
Przykłady obliczeń dla macierzy A z przykładu 1 za pomocą wolframalpha.com,
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=characteristic+polinomial%7B%7B1,2,0%7D,%7B0,2,0%7D,%7B-2,-2,-1%7D%7D`
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=eigenvalues%7B%7B1,2,0%7D,%7B0,2,0%7D,%7B-2,-2,-1%7D%7D`
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=eigenvectors%7B%7B1,2,0%7D,%7B0,2,0%7D,%7B-2,-2,-1%7D%7D`
`https://www.wolframalpha.com/input/?i=eigensystem%7B%7B1,2,0%7D,%7B0,2,0%7D,%7B-2,-2,-1%7D%7D`

9 Wartości i wektory własne – własności

Twierdzenie 1: Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ będą wartościami własnymi macierzy $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Wówczas:
(a) wyznacznik macierzy jest równy iloczynowi jej wartości własnych, tj.: $\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$;
(b) ślad macierzy (tj. suma elementów stojących na głównej przekątnej macierzy) równy jest sumie jej wartości własnych, tj.: $tr(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.
Twierdzenie 2: Niech A będzie macierzą kwadratową oraz niech λ będzie wartością własną macierzy A, a v odpowiadającym tej wartości własnej wektorem własnym. Wówczas:
(a) liczba λ^k jest wartością własną macierzy A^k (dla $k \in \mathbb{N}$);
(b) liczba $a_m\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$
jest wartością własną macierzy $a_mA^m + a_{m-1}A^{m-1} + \ldots + a_1A + a_0I$,
dla dowolnych $m \in \mathbb{N}$, $a_m, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$;
(c) jeżeli macierz A jest odwracalna, to λ^{-1} jest wartością własną macierzy A^{-1}.

Ponadto, w każdym z powyższych przypadków, wektorem własnym odpowiadającym wymienionym wartościom własnym jest również wektor v.
Przykład 1: Obliczymy wyznacznik macierzy A^3-4A^2-A+4I wiedząc, że A jest macierzą kwadratową wymiaru 3×3 o wartościach własnych $-2,0,3$.
Sposób 1. Wielomian charakterystyczny macierzy A ma postać

$$\varphi_A(\lambda)=-(\lambda+2)\,\lambda\,(\lambda-3)=-\lambda^3+\lambda^2+6\lambda.$$

Dodatkowo, ponieważ

$$A^3-4A^2-A+4I=A\left(A^2-I\right)-4\left(A^2-I\right)=(A-I)(A+I)(A-4I)$$

zatem, na podstawie definicji wielomianu charakterystycznego, otrzymujemy $\det\left(A^3-4A^2-A+4I\right)=\det\left[(A-I)(A+I)(A-4I)\right]=$
$=\det(A-I)\det(A+I)\det(A-4I)=\varphi_A(1)\,\varphi_A(-1)\,\varphi_A(4)=576.$
Sposób 2. Jeżeli λ jest wartością własną macierzy A, to na podstawie twierdzenia 1 (b), liczba $\lambda^3-4\lambda^2-\lambda+4$ jest wartością własną macierzy A^3-4A^2-A+4I. Stąd oraz z treści zadania otrzymujemy, że liczby -18, -8 oraz 4 są poszukiwanymi wartościami własnymi. Zatem, na podstawie twierdzenia 1 (a), $\det(A^3-4A^2-A+4I)=-18\cdot(-8)\cdot 4=576$.