Rozdział 7

Zupełność

7.1 Ciągi Cauchy i zupełność przestrzeni metrycznych

Znane z Analizy Matematycznej pojęcie ciągu Cauchy liczb przenosi się na dowolne przestrzenie metryczne:

Definicja 7.1.1. Ciąg punktów $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ w przestrzeni metrycznej (X, d) , nazywa się ciągiem Cauchy jeśli

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{n(\epsilon)}\forall_{r,s>n(\epsilon)}\, d(x_r, x_s) < \epsilon, \qquad \text{czyli}\, d(x_r, x_s) \to 0$$

Dowolny ciag zbieżny w (X, d) jest ciągiem Cauchy, lecz nie każdy ciąg Cauchy musi być zbieżny (np. w $((0, 1), d_e)$).

Stwierdzenie 7.1.1. *Jeśli $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy to prawie wszystkie wyrazy ciągu leżą w kuli o dowolnie małym promieniu. Jeśli zbiór $\{x_n\}$ posiada punkt skupienia x_0, to ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do x_0.*

Dowód. Niech $\epsilon > 0$. Z definicji ciągu Cauchy istnieje n_0 takie, że dla każdego $n, m \geqslant n_0$ zachodzi $d(x_n, x_m) \leqslant \frac{1}{2}\epsilon$, a zatem prawie wszystkie wyrazy ciągu leżą w kuli $B(x_{n_0}, \epsilon)$.

Jeśli zbiór $\{x_n\}$ posiada punkt skupienia x_0, to istnieje podciąg $\{x_{n_k}\}$ zbieżny do x_0. Stąd $d(x_n, x_0) \leqslant d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) \leqslant \epsilon$ dla dostatecznie dużych n i n_k. □

Definicja 7.1.2. Przestrzeń metryczna jest *zupełna* jeśli dowolny ciąg Cauchy jej elementów jest zbieżny (tzn. posiada granicę).

Stwierdzenie 7.1.2. *Jeśli $h\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ jest bijekcją zachowującą odległość (tzn. izometrią) oraz (X, d) jest przestrzenią zupełną, to (Y, d_Y) też jest przestrzenią zupełną.* □

Zwarta przestrzeń metryczna jest oczywiście zupełna, a z Twierdzenia 6.3.1 wynika, że dowolna metryka wyznaczająca topologię zwarta jest zupełna. Zachodzi nawet następujące nieco silniejsze twierdzenie:

Stwierdzenie 7.1.3. *Jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną. Załóżmy, że istnieje liczba $r > 0$ taka, że dla każdego punktu $x \in X$ domknięcie kuli $\mathrm{cl}(B(x, r))$ jest zbiorem zwartym. Wtedy (X, d) jest przestrzenią zupełną.*

Dowód. Niech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem Cauchy. Z Stwierdzenia 7.1.1 wynika, że prawie wszystkie elementy tego ciągu leżą w pewnej zwartej kuli $\mathrm{cl}(B(x,r))$, a więc ten ciąg jest zbieżny. □

Zupełność jest własnością metryczną pokrewną topologicznej zwartości, co świetnie ilustruje kolejne twierdzenie, analogiczne do Lematu 6.3.2. Należy jednak zauważyć, że w ogólności zupełność nie jest własnością topologiczną: dwie metryki mogą być równoważne, ale jedna zupełna a druga nie. Np. w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ można określić metrykę równoważną z (zupełną) metryką euklidesową, która nie jest zupełna.

Definicja 7.1.3. Niech A będzie podzbiorem w przestrzeni metrycznej (X,d). *Średnicą zbioru* A nazywa sie liczbę (lub $+\infty$) $d(A) := \sup\{d(x,y) \,|\, x,y \in A\}$

Lemat 7.1.1. *Dla dowolnego podzbioru A w w przestrzeni metrycznej (X,d) zachodzi równość średnic: $d(A) = d(\mathrm{cl}(A))$*

Dowód. $d(a,b) \leqslant d(a,a_n)+d(a_n,b) \leqslant d(a,a_n)+d(a_n,b_n)+d(b_n,b)$ stąd $d(a,b) \leqslant d(a_n,b_n)+2\epsilon$ dla $n > n_0$, a więc $d(A) = d(\mathrm{cl}(A))$ □

Twierdzenie 7.1.1 (Warunek Cantora[1]). *Przestrzeń (X,d) jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych o średnicach dążących do zera ma niepuste przecięcie.*

Dowód. Niech $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset ...$ będzie zstępującym ciagiem zbiorów domkniętych takich, że $d(F_i) \to 0$. Wybierając po jednym punkcie $x_n \in F_n$ otrzymujemy ciąg Cauchy. Na mocy zupełności (X,d) posiada on granicę, która musi należeć do $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$.

Odwrotnie, jeśli $\{x_i\}$ jest ciągiem Cauchy, to średnice zstępujących zbiorów domkniętych $F_n : \mathrm{cl}\{x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}$ zbiegają do zera na mocy Lematu 7.1.1, a więc $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq 0$ i punkt z tego zbioru jest granicą ciagu $\{x_i\}$. □

Definicja 7.1.4. Przestrzeń metryczna jest *całkowicie ograniczona* jeśli dla dowolnej liczby $\epsilon > 0$ istnieje pokrycie X skończenie wieloma zbiorami o średnicy $< \epsilon$. (Równoważnie: z pokrycia kulami $\{B(x,\epsilon)\}_{x \in X}$ można wybrać pokrycie skończone.)

Twierdzenie 7.1.2. *Przestrzeń (X,d) jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowicie ograniczona i zupełna.*

Dowód. $\Longrightarrow$ Jak zauważyliśmy dowolna przestrzeń zwarta jest zupełna, a z dowolnego pokrycia $\{B(x,\epsilon)\}_{x \in X}$ można wybrać pokrycie skończone.

$\Longleftarrow$ Załóżmy, że (X,d) jest zupełna i całkowicie ograniczona a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem z którego mamy wybrać podciąg zbieżny. SKonstruujemy indukcyjnie zstępujący ciąg zbiorów domkniętych, w którego przecięciu będzie znajdować się granica pewnego podciągu : pokryjmy przestrzeń X kulami o promieniu 1: $\{B(x,1)\}_{x \in X}$ i wybierzmy z niego kule w której znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ Załóżmy, że skonstruowaliśmy już ciąg kul domknętych $\bar{B}(x_1,1),\ldots,\bar{B}(x_k,\frac{1}{k})$ takich, że w przecięciu

[1] Georg Cantor (St Petersburg 1845 – 1918 Halle) founded set theory and introduced the concept of infinite numbers with his discovery of cardinal numbers. He also advanced the study of trigonometric series. [Mac Tutor]

$F_k := \bar{B}(x_1, 1) \cap \ldots, \cap B(x_k, \frac{1}{k})$ znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Pokryjmy X kulami $\{B(x, \frac{1}{k+1})\}_{x \in X}$. Istnieje wśród nich kula, która zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ znajdujących się w F_k. Otrzymaliśmy więc zstępujący ciąg zbiorów domkniętych $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ o średnicach zbiegających do 0. na mocy warunku Cantora 7.1.1 $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$ a z konstrukcji wynika, że punkt $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset$ jest punktem skupienia zbioru u $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a zatem granicą pewnego podciągu. □

7.2 Przestrzenie unormowane

Definicja 7.2.1. *Przestrzenią unormowaną* nazywamy przestrzeń wektorową $\mathbf{V}$ nad $\mathbb{R}$ wyposażoną w normę $|| \cdot || : \mathbf{V} \to \mathbb{R}^+$ spełniającą warunki:

1. $\|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = 0$
2. $\|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \|\mathbf{v}\|$
3. $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leqslant \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

Norma definiuje metrykę w zbiorze $\mathbf{V}$: $d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$. Jeśli ta metryka jest zupełna, to przestrzeń unormowana nazywa się *przestrzenią Banacha*[2].

Skończenie wymiarowe przestrzenie unormowane

Twierdzenie 7.2.1 (Równoważność norm). *Jeśli $\mathbf{V}$ jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$ to dowolne dwie normy definiują zupełne, równoważne metryki (tzn. wyznaczające tę samą topologię.)*

Wybierzmy bazę $\mathbf{v}_1, .., \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}$ i zdefiniujmy normę $\|\mathbf{v}\|_{\sup} := \sup\{|\lambda_i| \mid \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{v}_j\}$. Wykażemy, że dowolna norma $\| \cdot \|$ jest równoważna z normą $\| \cdot \|_{\infty}$ tzn. istnieją stałe $B, C > 0$ takie, że $\forall_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} \| \cdot \| \leqslant B \|\mathbf{v}\|_{\sup}$ oraz $\|\mathbf{v}\|_{\sup} \leqslant C \|\mathbf{v}\|$.

Lemat 7.2.1. *Istnieje $B > 0$ takie, że $\forall_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} \|\mathbf{v}\| \leqslant B \|\mathbf{v}\|_{\sup}$, w szczególności odwzorowanie $\| \cdot \| \colon \mathbf{V} \to \mathbb{R}$ jest ciągłe w normie $\|\mathbf{v}\|_{\sup}$.*

Dowód. Niech $\mu := \max\{\|\mathbf{v}_1\|, ..., \|\mathbf{v}_n\|\}$.

$$\|\mathbf{v}\| = \| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{v}_j \| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\lambda_i^k| \|\mathbf{v}_j\| \leqslant \mu \sum_{j=1}^{n} |\lambda_i| \leqslant B \|\mathbf{v}\|_{\sup}, \text{ gdzie } \quad B := n\mu$$

□

Lemat 7.2.2. *Dowolna kula domknięta w normie $\| \cdot \|_{\sup}$, czyli zbiór $D(\mathbf{v}, r) := \{\mathbf{w} \in \mathbf{V} \mid \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{\sup} \leqslant r\}$ jest zbiorem zwartym w topologii $\mathcal{T}(d_{\|\cdot\|_{\sup}})$.*

[2] Stefan Banach (Kraków 1892 – 1918 Lwów) founded modern functional analysis and made major contributions to the theory of topological vector spaces. In addition, he contributed to measure theory, integration, and orthogonal series. [Mac Tutor]

Dowód. Wystarczy rozważyć kule o środku w $\mathbf{v} = 0$. Odwzorowanie liniowe $f : (\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_e) \to (\mathbf{V}, \mathcal{T}(d_{\|\cdot\|})$ takie, że $f(\lambda_1, .., \lambda_n) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mathbf{v}_j$ jest ciągłe na mocy poprzedniego lematu, a więc kula $D(\mathbf{v}, r) = f([-r, r] \times ... \times [-r, r])$ jest zwarta jako obraz zbioru zwartego. □

Lemat 7.2.3. *Istnieje $C > 0$ takie, że dla każdego wektora $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ zachodzi nierówność $\|\mathbf{v}\|_{\sup} \leqslant C\|\mathbf{v}\|_{\sup}$*

Dowód. Niech $c := \inf\{\|\mathbf{v}\| \mid \|\mathbf{v}\|_{\sup} = 1\}$. Ciągłość normy $\|\cdot\|$ w normie $\|\cdot\|_\infty$ oraz zwartość kuli w normie $\|\mathbf{v}\|_{\sup}$ implikują, że $C > 0$. $\forall_{\mathbf{v}\neq 0} \quad \|\mathbf{v}\| = \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|_{\sup}}\|\mathbf{v}\|_{\sup} \geqslant c\|\mathbf{v}\|_{\sup}$, a więc $\|\mathbf{v}\|_{\sup} \leqslant C\|\mathbf{v}\|$, gdzie $C := \frac{1}{c}$. □

Dowód twierdzenia o normach. Twierdzenie wynika z lematów 1,3 bowiem jeśli dwie normy $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ są równoważne, to ciąg jest Cauchy ze względu na normę $\|\cdot\|_1 \iff$ jest Cauchy ze względu na $\|\cdot\|_2$, a ciąg $\mathbf{w}_i \xrightarrow{\|\cdot\|_1} \mathbf{w}$ jest zbieżny ze względu na normę $\|\cdot\|_1$ do wektora $\mathbf{w}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{w}_i \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \mathbf{w}$

Zauważmy, że zbieżność w sensie normy $\|\cdot\|_\infty$ oznacza zbieżność współrzędnych wektorów ciągu w wybranej bazie, a na mocy twierdzenia w dowolnej bazie. □

Przestrzenie odwzorowań

Definicja 7.2.2. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Przez $C(X)$ oznaczamy zbiór h funkcji ciagłych $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$, a przez $C_b(X)$ podzbiór składający się z funkcji ograniczonych. Dla dowolnej funkcji $f \in C_b(X)$ definiujemy

$$\|f\|_{\sup} := \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}.$$

Uwaga 7.2.1. Jeśli $(X, \mathcal{T})$ jest zwarta, to $C_b(X) = C(X)$. Jeśli $X := \{1, .., n\}$ to $C_b(X) = \mathbb{R} \times .. \times \mathbb{R}$, a norma $\|\cdot\|_{\sup}$ jest identyczna z normą sup wyznaczoną przez bazę kanoniczną $\mathbb{R}^n$.

Stwierdzenie 7.2.1. *Dla dowolnej przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ przestrzeń funkcji $C_b(X)$ wyposażona w odwzorowanie $\|\cdot\|_{\sup}\colon C_b(X) \to \mathbb{R}$ jest przestrzenią Banacha.*

Dowód. Przestrzeń funkcji $C(X)$ jest oczywiście przestrzenią wektorową jeśli położymy: $(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x)$, $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$. To, że odwzorowanie $\|\cdot\|_{\sup}\colon C_b(X) \to \mathbb{R}$ jest normą wynika natychmiast z własności wartości bezwzględnej. Pozostaje wykazać, że $C_b(X)$ z metryką wyznaczoną przez normę $\|\cdot\|_{\sup}$ jest zupełna. Niech $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem Cauchy w $C_b(X)$. Wynika stąd, że dla każdego $x \in X$ ciąg wartości $f_n(x)$ jest ciągiem Cauchy liczb rzeczywistych, a więc ma granicę, którą oznaczymy $f(x)$. Otrzymujemy w ten sposób funkcję $f : X \to \mathbb{R}$, która oczywiście jest ograniczona; pozostaje sprawdzić jej ciągłość. Wynika to z następnego, nieco ogólniejszego lematu. □

Lemat 7.2.4. *Niech $\{f_n : X \to \mathbb{R}\}$ będzie ciągiem funkcji ciągłych na przestrzeni $(X, \mathcal{T})$, a $f\colon X \to \mathbb{R}$ taką funkcją, że ciąg $\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|$ jest zbieżny do zera – (tzn. ciąg $\{f_n\}$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji $f : X \to \mathbb{R}$). Wtedy f jest funkcją ciągłą.*

Dowód. Niech $x_0 \in X$ i $\epsilon > 0$. Trzeba wskazać otoczenie $U \ni x_0$ takie, że $\forall_{x \in U} |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Dla dowolnego $x \in U$ zachodzi nierówność:

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|.$$

Dobierając dostatczenie duże n zapewnimy, że pierwszy i trzeci składnik bedą dowolnie małe, w szczególności $\frac{1}{3}\epsilon$, dla wszystkich $x \in X$. Z kolei dzięki ciągłości funkcji f_n możemy znaleźć otoczenie $U \ni x_0$ takie, że $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{1}{3}\epsilon$ dla $x \in U$, co kończy dowód ciągłości f. □

Uwaga 7.2.2. Przestrzenie $C_b(X)$ są na ogół nieskończenie wymiarowe i istnieje w nich wiele norm definiujących nierównoważne i niezupełne metryki. Np. wzór $\|f\|_{\int} := \int\limits_0^1 |f(t)|dt$ zadanie normę w przestrzeni $C([0,1])$, jednak przestrzeń metryczna $(C([0,1]), d_{\int})$ nie jest zupełna a metryki $d_{\sup}, d_{\int}$ nie są równoważne.

Przestrzenie metryczne w arytmetyce - norma p-adyczna

Stwierdzenie 7.2.2. *Niech p będzie liczbą liczba pierwszą. Odwzorowanie $|\cdot|_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $|m|_p := p^{-\alpha}$ gdzie $m = p^\alpha k$, $(p,k) = 1$, $|0|_p = 0$, które nazywa się normą p-adyczną ma nastepujące własności:*

1. $|n|_p = 0 \iff n = 0$
2. $|n \cdot m|_p = |n|_p \cdot |m|_p$
3. $|n + m|_p \leqslant |n|_p + |m|_p$ *– nierówność trójkąta*
4. $|x + y|_p \leqslant \max(|x|_p, |y|_p)$ *– silna nierówność trójkąta*

i wyznacza w $\mathbb{Z}$ metrykę p-adyczną: $d_p(n,m) := |n - m|_p$.

Uwaga 7.2.3. Zauważmy, że metryka d_p jest przesuwalna tzn. dla ustalonej liczby n_0 odwzorowanie $\tau_{n_0}(m) := n_0 + m$ jest izometrią. Dowolne dwie kule są albo rozłączne, albo jedna jest zawarta w drugiej. Przestrzenie metryczne $(\mathbb{Z}, d_p)$ nie są zupełne.

7.3 Twierdzenie Banacha o punktach stałych

Definicja 7.3.1. Niech $f : X \to X$ będzie dowolnym odwzorowaniem zbioru X w siebie. Punktem stałym odwzorowania nazywamy taki $x \in X$, że $f(x) = x$.

Twierdzenia o istnieniu punktów stałych odgrywają ogromną rolę w wielu działach matematyki. Poniższe twierdzenie mówi nie tylko o istnieniu punktów stałych dla ważnej klasy odwzorowań, ale dostarcza także algorytmu jego poszukiwania:

Twierdzenie 7.3.1 (S. Banach)**.** *Jeśli (X,d) jest zupełną przestrzenią metryczną a $f : X \to X$ odwzorowaniem zbliżającym tzn. takim dla którego istnieje liczba $0 \leqslant c < 1$ taka, że dla dowolnych punktów $x, y \in X$ zachodzi nierówność $d(f(x), f(y)) < cd(x,y)$. Wtedy f posiada dokładnie jeden punkt stały.*

Dowód. Zauważmy, że przekształcenie zbliżające musi być ciągłe, przeprowadza więc ciągi zbieżne na ciągi zbieżne. Wybierzmy dowolny punkt $x \in X$ i rozpatrzmy ciąg $\{x_n\}$ określony rekrencyjnie $x_1 := x$, $x_{n+1} := f(x_n)$. □

7.4 Zupełność a konstrukcje przestrzeni metrycznych

Omawiając konstrukcje przestrzeni topologicznych (Rozdział 4) zauważalismy które z nich zachowują metryzowalność, pokazując w jaki sposób mogą być przeprowadzane na przestrzeniach metrycznych. W przypadku podprzestrzeni było to po prostu obcięcie metryki, przestrzenie ilorazowe przestrzeni metryzowalnych nie są często metryzowalna, a nawet jeśli są nie dziedziczą naturalnej metryki. W przypadku nieskończonego produktu kartezjańskiego i sumy rozłącznej wyjściowe metryki musiały być zamienione na metryki ograniczone z gory przez 1. Zauważmy jednak, że jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną, to metryka "obcięta" $d'(x, y) := \min(d(x, y), 1)$ nie tylko wyznacza tę samą topologię, co d, ale także wyznacza tę samą klasę ciągów Cauchy, a więc jeśli d jest zupełna to i d' jest zupełna.

Stwierdzenie 7.4.1 (Podprzestrzenie zupełne)**.** *Jeśli podprzestrzeń przestrzeni metrycznej jest zupełna, to jest domknięta. Dowolna domknięta podprzestrzeń przestrzeni zupełnej jest zupełna.*

Dowód. Jeśli $A \subset X$ jest podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, d) takim, że przestrzeń metryczna $(A, d|A)$ jest zupełna. Niech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem elementów A zbieżnym do elementu $x_0 \in A$. Skoro $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny w (X, d) , to jest ciągiem Cauchy, a więc posiada granicę w A. Ponieważ każdy ciąg posiada co najwyżej jedną granicę, $x_0 \in A$, a więc A jest zbiorem domknętym.

Jeśli podprzestrzeń $(A, d|A) \subset (X, d)$ przestrzeni zupełnej jest domknięta to dowolny ciąg Cauchy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posiada granicę w X, która na mocy domkniętości A należy do A. □

Stwierdzenie 7.4.2 (Zupełność produktu)**.** *Przeliczalny (w tym skończony) produkt produkt przestrzeni metrycznych jest przestrzenią zupełną wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie czynniki są przestrzeniami zupełnymi.*

Dowód. Niech $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ będzie przeliczalną rodziną przestrzeni metrycznych. Przypomnijmy, że w zbiorze $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ definiujemy metrykę:

$$d'(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d'(x_i, y_i)$$

gdzie $d'_i(x_i, y_i) := \min(d_i(x_i, y_i), 1)$.[3]

Jeśli produkt $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ jest przestrzenią zupełną, to dowolna podprzestrzeń (X, d'_i) (z zatem też (X, d_i) jest zupełna bowiem jest izometryczna z podzbiorem domkniętym $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ (p.Lemat 4.4.1).

[3]W przypadku skończonego produktu $(X_1, d_1) \times \cdots \times (X_k, d_k)$, można metrykę zdefiniować prościej: $d(x, y) := \sum_{i=1}^{k} d(x_i, y_i)$.

Odwrotnie, załóżmy że wszystkie przestrzenie $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^{\infty}$ są zupełne. Niech $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem Cauchy. Z definicji metryki produktowej wynika, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ ciąg $\{x_k^n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy w (X_k, d_k), a więc jest zbieżny do pewnego punktu x_k^0. Pokażemy, że ciąg $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do x^0. Niech $\epsilon > 0$, dla dostatecznie dużych N i $n > N$ zachodzą nierówności:

$$d'(x^n, x^0) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d'(x_i^n, x_j^0) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i} d'(x_i^n, x_j^0) + \frac{1}{2}\epsilon \leqslant \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$$

□

Stwierdzenie 7.4.3 (Zupełność sumy)**.** *Suma rozłączna przestrzeni zupełnych jest przestrzenią zupełną wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie składniki są przestrzeniami zupełnymi.*

7.5 Twierdzenie Baire'a i topologiczna zupełność

Zupełność przestrzeni metrycznej (X, d) pociąga pewną ważną wlasność topologii $\mathcal{T}(d)$, która może być przyjęta za definicję zupełności w sensie topologicznym.

Twierdzenie 7.5.1 (R. Baire[4])**.** *Jeśli (X, d) jest zupełną przestrzenią metryczną, to przecięcie dowolnej rodziny $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ zbiorów otwartych i gęstych w topologii $\mathcal{T}(d)$ jest zbiorem gęstym.*

Dowód. Niech $V \in \mathcal{T}(d)$ będzie niepusty. Trzeba pokazać, że $V \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \neq \emptyset$. Z gęstości U_i mamy $\forall_i\, V \cap U_i \neq \emptyset$, a więc można wybrać punkt $x_1 \in V \cap U_1 \neq \emptyset$ oraz promień $r_1 > 0$ taki, że $\bar{B}(x_1, r_1)) \subset V \cap U_i$, a następnie skonstruuować indukcyjnie zstępujący ciąg domknięć kul: $\bar{B}(x_i, r_i) \subset B(x_{i-1}, r_{i-1}) \cap U_{i-1}$, takich, że $r_i \to 0$. Z zupełności (X, d) mamy

$$V \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \supset \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{B}(x_i, r_i) \neq \emptyset.$$

□

Wniosek 7.5.1. *Jeśli (X, d) jest zupełną przestrzenią metryczną, to suma dowolnej rodziny $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ zbiorów domkniętych i brzegowych w topologii $\mathcal{T}(d)$ jest zbiorem brzegowym.*

Dowód. Dowód wynika natychmiast z praw de Morgana, bowiem dopełnienia zbiorów domkniętych i brzegowych są zbiorami otwartymi, gęstym. Mamy więc $X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (X \setminus F_i)$ jest zbiorem gęstym a więc $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ jest zbiorem brzegowym. □

Twierdzenie Baire'a i wnioski z niego, sotosowane do przestrzeni odwzorowań ma wiele zastosowań w Analizie Matematycznej i Topologii Różniczkowej.

[4] René-Louis Baire (Paryż 1874 - 1918 Chambéry, Francja) worked on the theory of functions and the concept of a limit. [Mac Tutor]