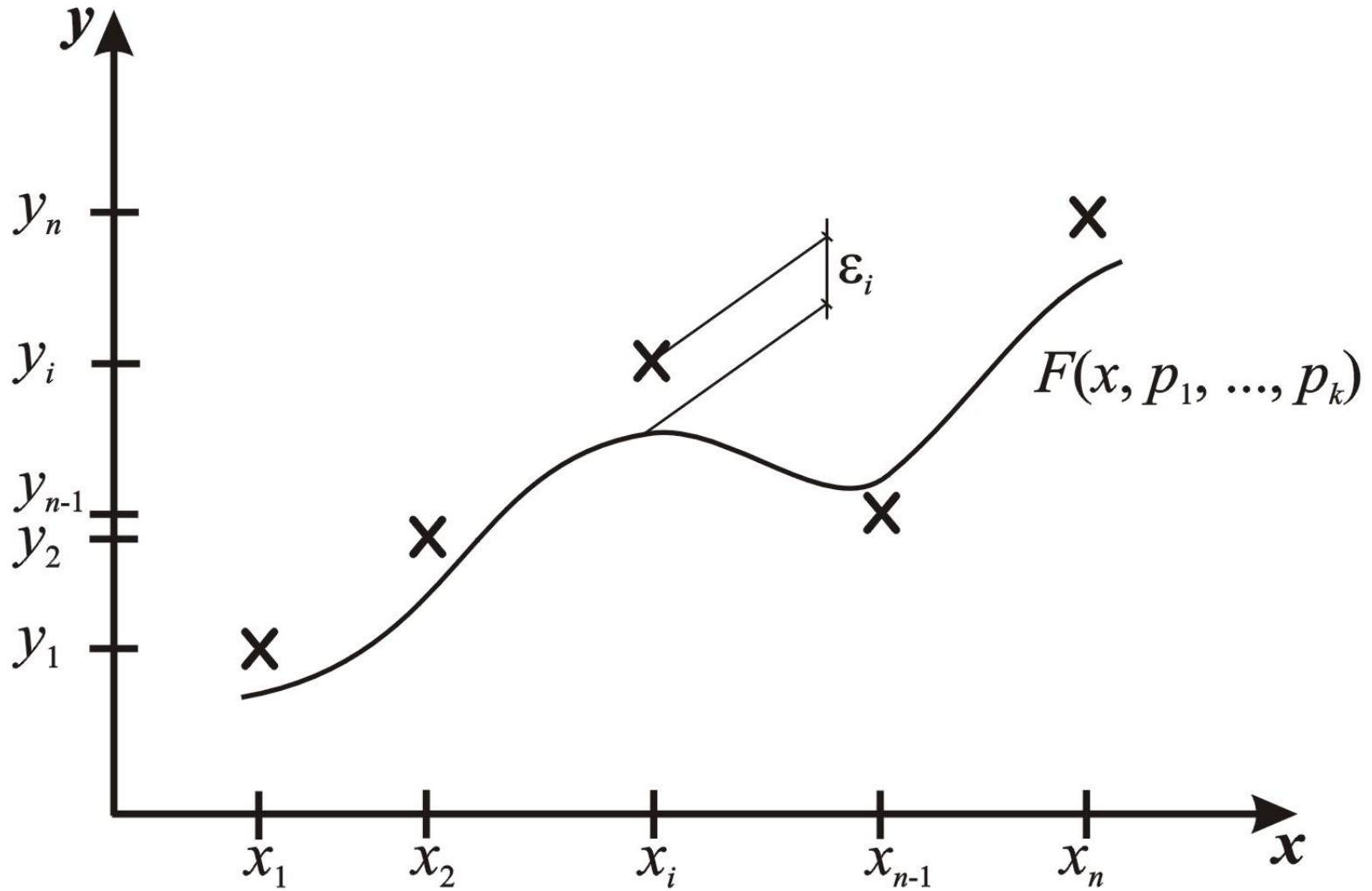


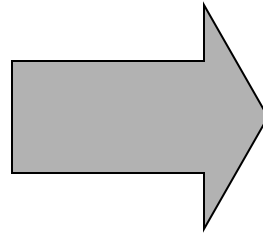
**APROKSYMACJA**

# **Definicja aproksymacji**



Dana jest funkcja  
jednej zmiennej:

$$y = f(x), x \in [a, b]$$



Należy dobrać taką  
funkcję

$$F(x, p_1, \dots, p_k), x \in [a, b],$$

aby w sensie  
przyjętego kryterium,  
funkcja  $F(x, p_1, \dots, p_k)$   
możliwie dokładnie  
odtwarzała przebieg  
funkcji  $f(x)$ .

$p_1, \dots, p_k$  – parametry  
wzoru empirycznego

Funkcja  $f(x)$  może być zadana w postaci:

- zbioru punktów (aproksymacja punktowa):

$$f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \dots, f(x_n) = y_n$$

- wzoru analitycznego (aproksymacja integralna) – rzadziej spotykany przypadek

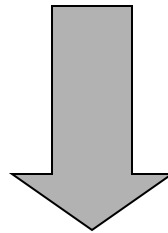
Kryteria aproksymacji punktowej dla funkcji jednej zmiennej konstruuje się w taki sposób, aby zminimalizować różnice między wartościami danej funkcji  $f(x)$  a wartościami funkcji  $F(x, p_1, \dots, p_k)$  w punktach  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Odchyłka:

$$\varepsilon_i = F(x_i, p_1, \dots, p_k) - y_i$$

- ☞ Ogólna postać funkcji  $F(x, p_1, \dots, p_k)$  jest założona z góry, natomiast optymalizacja dotyczy nieznanymi parametrów  $p_1, \dots, p_k$

Typowe metody aproksymacji funkcji jednej zmiennej



Dobór parametrów  $p_1, \dots, p_k$  wzoru empirycznego, w taki sposób aby spełnione było założone kryterium dotyczące minimalizacji odchyłek



Kryteria:

- metoda wybranych punktów
- metoda średnich
- metoda sumowania bezwzględnych wartości
- metoda najmniejszych kwadratów

# **Metoda najmniejszych kwadratów**

Dobór współczynników funkcji  $F$  :

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \min$$

Kryterium najmniejszych kwadratów:

$$\sum_{i=1}^n [F(x_i, p_1, \dots, p_k) - y_i]^2 = \min$$

$n$  – ilość punktów

Zalety:

- kryterium jest „mocne” – zawiera kwadraty odchyłek, czyli liczby nieujemne
- prostota obliczeń minimum funkcji, pod warunkiem że rozpatruje się aproksymację w klasie wielomianów uogólnionych, czyli:

$$F(x, p_1, \dots, p_k) = p_1 \varphi_1(x) + p_2 \varphi_2(x) + \dots + p_k \varphi_k(x)$$

# **Aproksymacja liniowa funkcji jednej zmiennej**

Dany jest zbiór punktów:

$$(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2) \quad \dots \quad (x_n, y_n)$$

Funkcja aproksymująca:

$$\hat{y} = p_1 + p_2 x$$

Kryterium najmniejszych kwadratów:

$$S(p_1, p_2) = \sum_{i=1}^n [p_1 + p_2 x_i - y_i]^2 = \min$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji dwóch zmiennych:

$$\frac{\partial S(p_1, p_2)}{\partial p_1} = 0$$

$$\frac{\partial S(p_1, p_2)}{\partial p_2} = 0$$

czyli:

$$\frac{\partial S(p_1, p_2)}{\partial p_1} = 2 \sum_{i=1}^n [p_1 + p_2 x_i - y_i] \cdot 1 = 0$$

$$\frac{\partial S(p_1, p_2)}{\partial p_2} = 2 \sum_{i=1}^n [p_1 + p_2 x_i - y_i] \cdot x_i = 0$$



$$\sum_{i=1}^n [p_1 + p_2 x_i - y_i] = 0$$

$$\sum_{i=1}^n [p_1 x_i + p_2 x_i^2 - y_i x_i] = 0$$

Układ ten zapisujemy w formie:

$$p_1 n + p_2 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$p_1 \sum_{i=1}^n x_i + p_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i x_i$$

lub:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i x_i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{Y}$$

Liczmy:

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1} \cdot \mathbf{Y}$$

**Aproksymacja funkcji jednej  
zmiennej – inna funkcja  
aproksymująca**

Dany jest zbiór punktów:

$$(x_1, y_1) \quad (x_2, y_2) \quad \dots \quad (x_n, y_n)$$

Funkcja aproksymująca:

$$\hat{y} = p_1 + p_2 x + p_3 \frac{1}{x}$$

Kryterium najmniejszych kwadratów:

$$S(p_1, p_2, p_3) = \sum_{i=1}^n \left[ p_1 + p_2 x_i + p_3 \frac{1}{x_i} - y_i \right]^2 = \min$$

czyli:

$$\frac{\partial S(p_1, p_2, p_3)}{\partial p_1} = 2 \sum_{i=1}^n \left[ p_1 + p_2 x_i + p_3 \frac{1}{x_i} - y_i \right] \cdot 1 = 0$$

$$\frac{\partial S(p_1, p_2, p_3)}{\partial p_2} = 2 \sum_{i=1}^n \left[ p_1 + p_2 x_i + p_3 \frac{1}{x_i} - y_i \right] \cdot x_i = 0$$

$$\frac{\partial S(p_1, p_2, p_3)}{\partial p_3} = 2 \sum_{i=1}^n \left[ p_1 + p_2 x_i + p_3 \frac{1}{x_i} - y_i \right] \cdot \frac{1}{x_i} = 0$$

## Aproksymacja funkcji jednej zmiennej – inna funkcja aproksymująca

---

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & n \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} & n & \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} y_i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{Y}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1} \cdot \mathbf{Y}$$