Liczby zespolone

Definicja 1

Liczbą zespoloną nazywamy uporządkowaną parę liczb rzeczywistych. Piszemy $z = (x, y)$. Zbiór liczb zespolonych oznaczamy przez $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Działania na liczbach zespolonych

Równość dwóch liczb zespolonych

Dwie liczby zespolone $z_1 = (x_1, y_1)$ oraz $z_2 = (x_2, y_2)$ są równe jeżeli $x_1 = x_2$ oraz $y_1 = y_2$

Dodawanie i mnożenie liczb zespolonych

Niech $z_1 = (x_1, y_1)$ oraz $z_2 = (x_2, y_2)$. Wtedy
$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$

Dodawanie i mnożenie liczb zespolonych mają następujące własnosci

Twierdzenie 1

Niech $z, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$. (Dodawanie liczb zespolonych jest przemienne.)
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$. (Dodawanie jest łączne.)
3. $z + (0, 0) = (0, 0) + z = z$. (Liczba $(0, 0)$ jest elementem neutralnym dodawania).
4. Dla każdej liczby zespolonej z istnieje dokładnie jedna liczba zespolona w taka że $w + z = (0, 0)$.

Twierdzenie 1 c.d.

5. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (Mnożenie liczb zespolonych jest przemienne.)
6. $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ (Mnożenie liczb zespolonych jest łączne).
7. $z \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot z = z$ (Liczba $(1, 0)$ jest elementem neutralnym mnożenia $(1, 0) = 1$).
8. dla każdej liczby zespolonej $z = (x, y) \neq 0$ liczba
$$\frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$
spełnia ró wność $z \cdot \frac{1}{z} = 1$
9. $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$ (Mnożenie jest rozdzielne względem dodawania).

Definicja 2 (jednostka urojona)

Liczbę $(0,1)$ nazywamy *jednostką urojoną* oraz oznaczamy przez i.

Jednostka urojona ma tę własność że

$$i^2 = -1$$

postać algebraiczna liczby zespolonej

Wyrażenie postaci

$$z = x + iy \qquad \text{gdzie} \qquad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

nazywamy liczbą zespoloną w postaci algebraicznej

x nazywamy częścią rzeczywistą liczby zespolonej i oznaczamy $Re(z)$.
y nazywamy częścią urojoną liczby zespolonej i oznaczamy $Im(z)$.

Definicja 3 (sprzężenie liczby zespolonej)

Sprzężeniem liczby zespolonej $z = x + iy$ nazywamy liczbę $\bar{z} = x - iy$

Definicja 4 (moduł liczby zespolonej)

Modułem liczby zespolonej $z = x + iy$ nazywamy wyrażenie

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Własności modułu liczby zespolonej Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Wtedy

1. $|\bar{z}| = |z| = |-z|$
2. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
4. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad$ o ile, $\quad z_2 \neq 0$
5. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
6. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$
7. $|Rez| \leq |z|, |Imz| \leq |z|$
8. $|Re(z_1 \cdot z_2)| \leq |z_1| \cdot |z_2|$